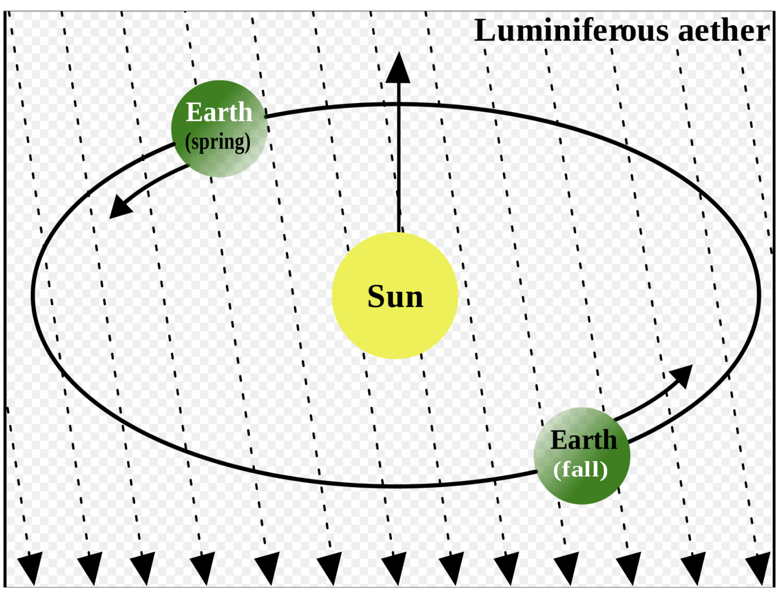
惯性系：

力学现象不能区分 one from another，
电磁学现象可以吗？

— if yes，C 将有不同的测量值
在不同的惯性系中，
电磁波是，没有看见具体的某个
惯性系

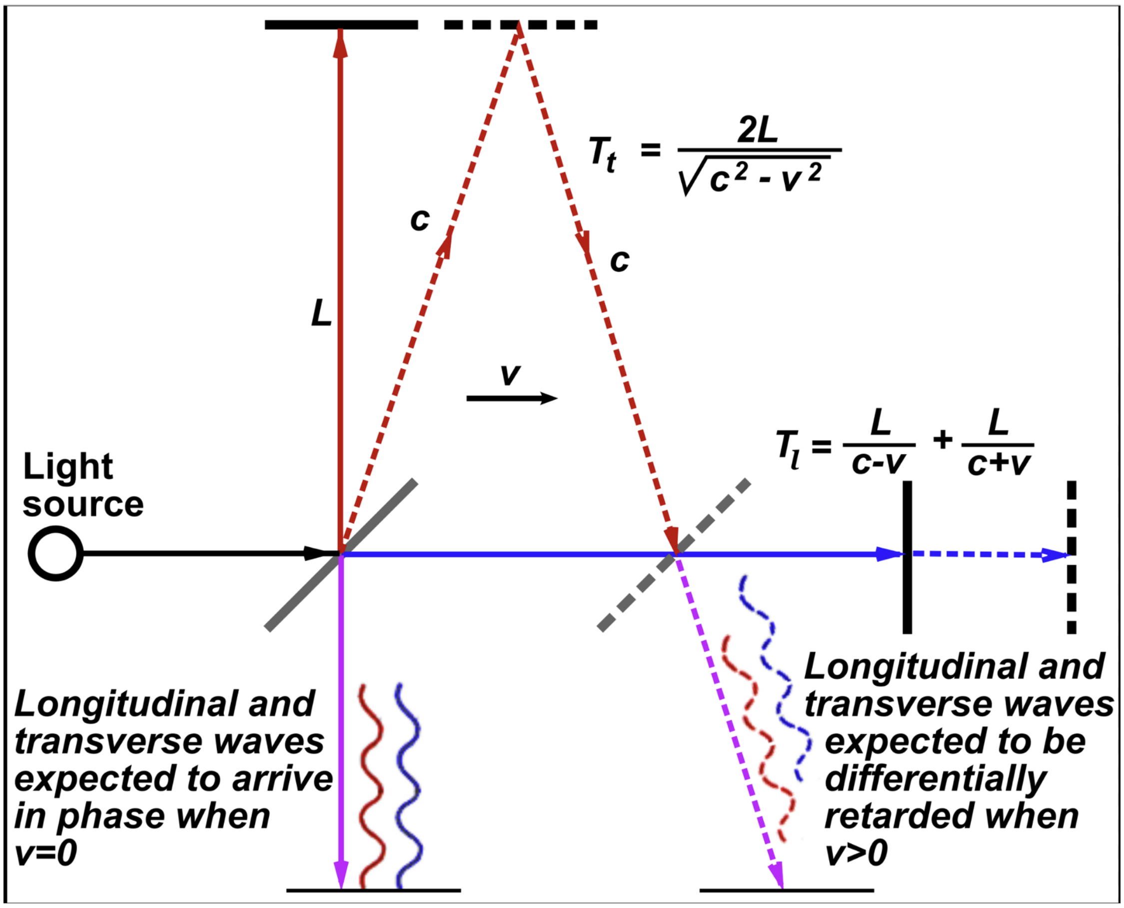
发光的　以太
l, lu:mə'nifərəs/　/'i:θər/



"aether wind"

Michelson – Morley experiment (1887)

most famous "failed" experiment



如果光速对所有惯性参考系均为 c

如何建立不同惯性系观测者的时空关系？

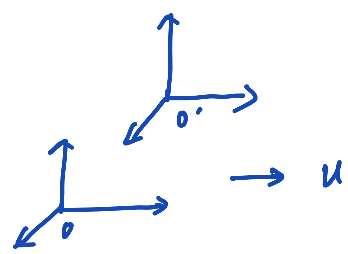
$A \quad (x, t)$ $\qquad\qquad$ $B \quad (x', t')$

请守好自己的坐标系

（同一个 u 相对性 Ⅱ）

$$\begin{cases} x' = x - ut & ① \\ x = x' + ut' & ② \\ t = t' & ③ \end{cases}$$

伽利略变换



①：x' 是 A 眼中的

②：x 是 B 眼中的

"我不要你觉得，我要我觉得."

相对性 Ⅱ

相对论的相对性 （同样的尺缩效应）

γ

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - ut) & ④ \\ x = \gamma(x' + ut') & ⑤ \end{cases}$$ 左右对称

$\gamma(?)$ $\gamma(x,t)$? 时空均匀，NO! $\gamma(u)$

A, B 在 (0,0) 重合，校准钟表

光脉冲信号发出

A (x,t) 收到信号

B (x',t') 收到信号

↓ C 不变基本假设

$$x = ct \quad ⑥$$

$$x' = ct' \quad ⑦$$

refer to ④ ⑤

$$ct' = \gamma(ct - ut)$$

↓

$$t'/t = \gamma(c-u)/c \quad ⑧$$

$$ct = \gamma(ct' + ut')$$

↓

$$t'/t = \frac{c}{\gamma(c+u)} \quad ⑨$$

⑧ = ⑨

$$\Rightarrow \gamma^2 \frac{c-u}{c} = \frac{c}{c+u}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{c^2}{c^2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} > 1$$

或 ④ × ⑤

$$x x' = \gamma^2 \left(x x' - u^2 \frac{x x'}{c^2} \right)$$

$$1 = \gamma^2 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma \left(x - u \frac{x}{c} \right) \qquad t = \frac{x}{c}$$

$$x = \gamma \left(x' + u \frac{x'}{c} \right) \qquad t' = \frac{x'}{c}$$

将 γ 代回 ④ 式

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ t' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{u}{c}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

$$= \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

固有时：你家阳台开花结果

（同地测量）

固有长度：静止在坐标系的长度

但无论在哪个惯性参考系测长度，都要保持同时性

（在相对被测物静止的参考系你以不同时测，实际上因为不同时测的结果相同）

$$x' = \gamma(x - ut) \quad ①$$

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}x\right) \quad ②$$

↓ $x_1 = x_2$，固有时参考系

② $\Rightarrow \Delta t' = \gamma \Delta t$

怎么算 $\Delta x' \sim \Delta x$

直接由 ① $\rightarrow \Delta x' = \gamma \Delta x$

没考虑同时的相对性

$t_1 = t_2 = t$ 同时

but $t_1' \neq t_2'$ 不同时

这样，就不是 $\Delta x'$

在 primed reference system，

$\Delta x'$ 测量需要同时！

要保持 $t_1' = t_2'$

可列出与 ① 相对应的式子

$$x = \gamma(x' + ut')$$

（静止在 O 系中的物体，不要求 $t_1 = t_2$）

（固有长度） $\Delta x = \gamma \Delta x'$

$$\therefore \quad \Delta x' = \frac{1}{\gamma} \Delta x$$

$$\begin{cases} \Delta x' = \dfrac{1}{\gamma} \Delta x \\ \Delta t' = \gamma \Delta t \end{cases}$$

固有时最短，固有长度最长

"钟慢" 到底在说什么？

一个时钟在一个惯性参考系(O)"滴答"

考虑一个时钟连续两次作为两个 events 滴答

$\begin{cases} \text{event 1} \\ \text{event 2} \end{cases}$

↓ 经历时间差 T_0

在另一个相对于这个惯性参考系作匀速运动的参考系(O')而言，这两个事件也有一个时间差 T

$$T = \gamma T_0$$

对 O' 而言：时间间隔更长，

O 的钟一个小时，比如在 O' 是 2 个小时，那么 O 的钟就將更慢，自己钟是正常的，别人的钟慢了！

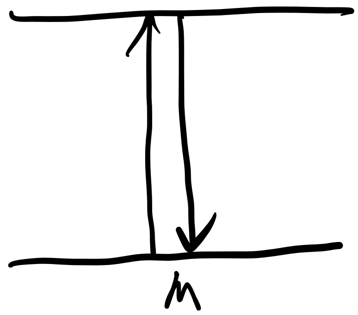
反过来，

O 也觉得 O' 的钟更慢！

光钟解释：refer to Shankar's book

O：

（发射接收信号在同一点 M）



比如在 bus 上

$T_0 = 2L/c$　来回打为一个计时周期！

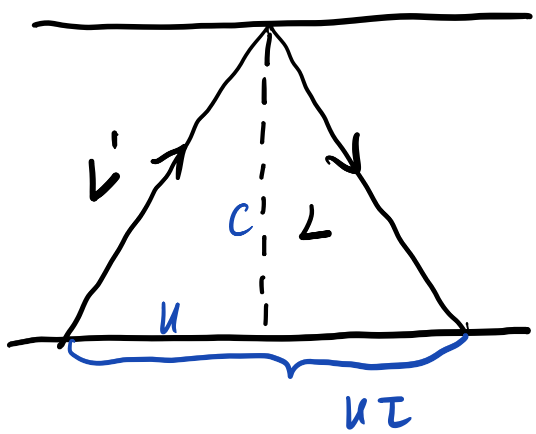
O 相对于 O′

是 $\vec{u}$ →

O′：

（静止参考系）

比如地面观测者



$T = 2L'/c$

（note：有同学觉得按照最初的 notation，O, O′要交换，key point 在于区分固有时和观测者，名字不重要。这里选择了固有时为 O 系，比如在一辆 bus 上相对于地面以水平向右的速度 u 前进。）

★ 一种错误的计算方法：

$$L' = \sqrt{L^2 + u\left(\frac{T_0}{2}\right)^2} \Longrightarrow$$

$$c\left(\frac{T}{2}\right) = c\sqrt{\left(c\frac{T_0}{2}\right)^2 + \left(u\frac{T_0}{2}\right)^2}$$

$$T = T_0\sqrt{1 + \frac{u^2}{c^2}}$$

采用 O' 系的测量时间：

$$L' = \sqrt{\left(c\,\underline{\underline{\frac{T_0}{2}}}\right)^2 + u\left(\underline{\underline{\frac{T}{2}}}\right)^2}$$

竖直方向的长度不会因为水平方向的速度而改变，所以有：

$$\left(c\frac{T}{2}\right)^2 - \left(u\frac{T}{2}\right)^2 = L^2 = \left(c\frac{T_0}{2}\right)^2$$

$$T = T_0 \Big/ \sqrt{1 - u^2/c^2} = \gamma T_0$$

光钟 → 机械钟 → 生物钟

时间年轻的问题

"运动让人年轻"

—— 别人看你觉得你年轻

（默认生物钟固定，比如活100岁，

转一整圈。转$\frac{1}{2}$圈，活自己的50

岁，别人记录的时间差 $\Delta t = \gamma \times 50$ years，

认为已经过了 50γ 年，但你看上去像只有50岁

"运动让人苗条"

—— 别人测得间距"尺缩"了

（这里有"同时"的相对性）

proper time:

infinitesimal spacetime interval between the two events

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$$

$$= (c\,dt)^2 \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right]$$

$$ds = c\,dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

where $\frac{dx}{dt} = v$ is the velocity of the particle

ds is an invariant

choose a comoving reference frame

with the particle : $\frac{dx}{dt} = 0$

$dx = 0$ (the same point)

$ds = c\,d\tau$ (proper time)

for another observer

$$ds = c\,dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = c\,d\tau$$

$$\frac{dt}{d\tau} = 1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Four - vectors :

$$X = (ct, \vec{x}) = (x_0, \vec{x})$$

$$V = \frac{dX}{d\tau} = \left(\frac{dx_0}{d\tau}, \frac{d\vec{x}}{d\tau} \right)$$

$$= \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left(c, \frac{d\vec{x}}{dt} \right)$$

$$V \cdot V = V_0^2 - \vec{V} \cdot \vec{V} = c^2$$

$$P = m \frac{dX}{d\tau}$$

$$= \left(\frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) = (p_0, \vec{p})$$

For P to be a four - vector, m should be the same in all frames, that is, invariant under Lorentz transformations.

some people like to write $\quad \vec{p} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} = m(v) \vec{v}$

$$m(v) = m \Big/ \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$m(v)$ is a new velocity dependent mass. Some people refer to $m(0) = m$ as the rest mass m_0. Their point is that if you introduce a velocity dependent mass, then momentum can still be mass times velocity as in the old days. We will not do that: for us m is always the rest mass, and momentum is now a more complicated function of this mass and velocity.

It is interesting that Feynman Eq.(15.1) wrote $F = d(mv)/dt$, $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

at the beginning of special relativity

Feynman belongs to some people Shankar mentioned.

换一个角度：对称性

keep 长度不变

$$x^2+y^2=x'^2+y'^2$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cosh\theta = \dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} \\ \sinh\theta = \dfrac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{2} \end{cases}$$

keep x^2-y^2 不变

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

看一下此变换矩阵

$$U = \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \qquad \text{双曲转动}$$

$$\det U = 1$$

eigenvalue : $(\cosh\theta - \lambda)^2 - \sinh^2\theta = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda\cosh\theta + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{2\cosh\theta \pm 2\sinh\theta}{2}$$

$$= \cosh\theta \pm \sinh\theta$$

令 $\tanh\theta = \frac{u}{c}$，则有

$$\cosh\theta = 1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\sinh\theta = \frac{u}{c} \Big/ \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$$

$$\downarrow$$

$$\sqrt{\frac{c \pm u}{c \mp u}}$$

$$U\vec{r} = \lambda \vec{r} \qquad U^{-1} = \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \lambda_+ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} \quad ①$$

$$-\sinh\theta\, r_1 - \sinh\theta\, r_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_+ : \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_- : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

本征矢是什么意思？

变换只能对其进行尺度缩放（含符号）

$$\vec{r} \xrightarrow{U} \vec{r}$$

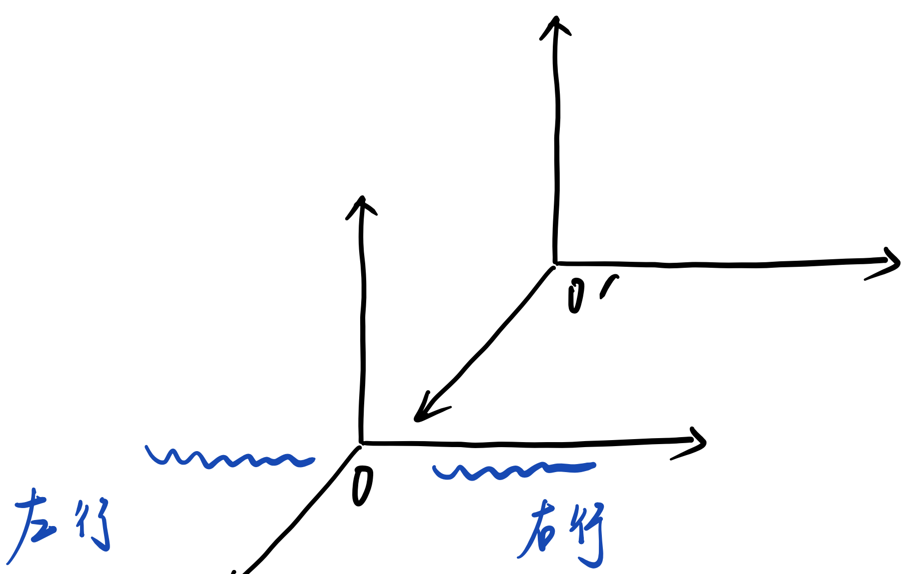
$$\begin{pmatrix} r_1 \to ct \\ r_2 \to x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = ct$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -ct$$

看到光速，无论在哪个惯性参考系，均看到光速

不同的惯性参考系，共享相同的本征矢。



在所观测者看来是一样的，

都是U变换下的本征矢

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ vt \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} c \\ v \end{pmatrix} = ct\begin{pmatrix} 1 \\ v/c \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{right}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \;/\; \underset{\text{left}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

SO(2) 转动矩阵 的 eigenpair

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = 0$$

$$\lambda^2 - 2\cos\theta\,\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{2\cos\theta \pm \sqrt{-4\sin^2\theta}}{2}$$

$$= \cos\theta \pm i\sin\theta$$

$$(\cos\theta - \lambda_+)\varphi_1 - \sin\theta\,\varphi_2 = 0$$

$$\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{-i\sin\theta}{\sin\theta} = -i$$

$$\varphi_+ = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\varphi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

本征矢 物理意义： 圆偏振光

一个转动在实空间没有本征矢，没有二维线性空间转不动的矢量，必须有 i。

而 (t, x) 时空中恰恰不能有 i，还要落在时空中。

$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ 电场两个分量差一个相位 $\frac{\pi}{2}$

$$\arg(E_y) = \arg(E_x) + \frac{\pi}{2}$$

An electromagnetic wave such as light consists of a coupled oscillating electric field and magnetic field which are always perpendicular to each other; by convention, the "polarization" of electromagnetic waves refers to the direction of the electric field. In linear polarization, the fields oscillate in a single direction. In circular or elliptical polarization, the fields rotate at a constant rate in a plane as the wave travels, either in the right-hand or in the left-hand direction.

space - time intervals :

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

$\downarrow$

1 + 1 space - time

keep $c^2t^2 - x^2$ invariant

$$= (ct)^2 + (ix)^2$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ ix' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$\frac{ct}{ix} = \frac{1}{-i}$$

$$v = -c$$

$$\begin{pmatrix} ct \\ ix \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$ct = x$$

$$v = c$$