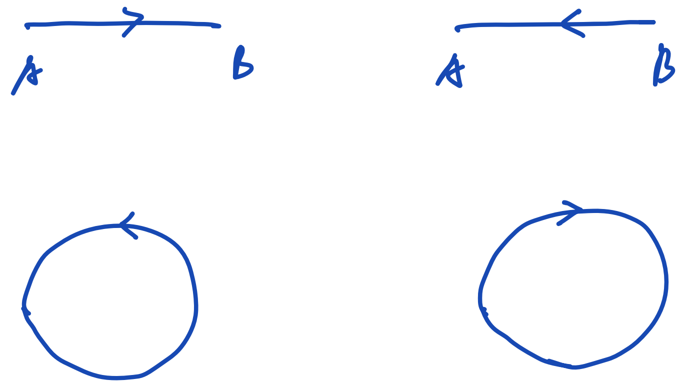
定向概念是几何拓扑中最有深刻意义的伟大创造之一。

—— 法国数学家，R. Thom，1923~



多重积分的体积元素应有正负定向是大数学家 poincaré 于19世纪末指出的，这一看似平凡的想法使得多元微积分产生了根本性的变革。

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad ①$$

$$dA = dx\,dy = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv \quad ②$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v)) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv \quad ③$$

D'是由D经过①的逆变换所得到的区域

如果D定向曲面，③中行列式的绝对值可以去掉

$$dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv$$

1° $y=x$

$dx\,dx = 0$

2° x, y互换，矩阵进行行变换，

$dx\,dy = -dy\,dx$

有时记作 $dx\wedge dx=0$，$dx\wedge dy = -dy\wedge dx$

积分区域定向，引入外乘积，顺理成章。

由微分的外乘积 乘上函数组成的微分形式，

称为外微分形式，若 P, Q, R，A, B, C，H

都是 x, y, z 的函数，则

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

one-form （一次外微分，与普通微分一样）

$$A\,dx \wedge dy + B\,dy \wedge dz + C\,dz \wedge dx$$

two-form （二次外微分）

$$H\,dx \wedge dy \wedge dz \quad \text{（三次外微分）}$$

$P, Q, R, \ldots$ 外微分形式的系数，而称函数

f 为 0 次外微分

外微分的外乘积满足分配率及结合律

λ, μ, ν

(1) $(\lambda+\mu)\wedge\nu = \lambda\wedge\nu + \mu\wedge\nu$

$\lambda\wedge(\mu+\nu) = \lambda\wedge\mu + \lambda\wedge\nu$

(2) $\lambda\wedge(\mu\wedge\nu) = (\lambda\wedge\mu)\wedge\nu$

(3) 若 λ 为 p 次外微分形式，μ 为 q 次外微分形式，则

$\mu\wedge\lambda = (-1)^{pq}\,\lambda\wedge\mu$

定义外微分算子

f: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$

0 次

普通全微分算子

w : $w = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

1 次

定义 $dw = dP\wedge dx + dQ\wedge dy + dR\wedge dz$

即对 P, Q, R 进行外微分，然后进行外乘积。

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz$$

$$dR = \frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz$$

$$\therefore \quad d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right) \wedge dx$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz\right) \wedge dy$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) \wedge dz$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy\right)$$

$$+ \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial R}{\partial y} dy \wedge dz\right)$$

$$= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\, dx$$

对于二次外微分形式

$$w = A\,dy\wedge dz + B\,dz\wedge dx + C\,dx\wedge dy$$

$$dw = dA\wedge dy\wedge dz + dB\wedge dz\wedge dx + dC\wedge dx\wedge dy$$

$$= \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz$$

对于三次外微分形式

$$w = H\,dx\wedge dy\wedge dz$$

$$dw = 0$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz$$

每项结合 $dx\wedge dy\wedge dz$ 有两个相同微分。

关于外微分算子，立即可得到重要的定理

poincaré 引理　若 w 为一外微分形式，其微分形式的系数具有二阶连续偏导数，则

$$d\,dw = 0$$

还有

Poincaré 引理之逆 若 ω 是一个 p 次外微分形式，且 $d\omega=0$，则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 ∂，使得 $\omega = d\partial$

Green 公式

$$\int_L P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

记 $\omega_1 = P\,dx + Q\,dy$ $\qquad (\nabla \times \vec{v})_z$

$$\int \omega_1 = \iint d\omega_1 \qquad \vec{v} = (P, Q, 0)$$

Stokes 公式

$$\int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Omega \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

记 $\omega_2 = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$

$$d\omega_2 = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\int w_2 = \iint d w_2$$

$$\vec{v} = (P, Q, R)$$

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Gauss 公式

$$\iint_{\partial V} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz$$

记 $w_3 = P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy$

（二次外微分）

$$d w_3 = \underbrace{\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right)}_{\nabla \cdot \vec{v}} dx \wedge dy \wedge dz$$

$\vec{v} = (P, Q, R)$

$$\iint w_3 = \iiint d w_3$$

Stokes 定理

$$\int_{\partial \Omega} w = \int_{\Omega} d w \quad (*)$$

Ω : dw 的积分区域

$\partial \Omega$: Ω 的边界

Ω 的维数与 dw 的次数相一致

在三维 Euclid 空间，联系区域与边界的积分公式不会再有了。因为三次外微分形式的外微分为 0

当 ω 为零次外微分

$$\int_a^b d\omega = \omega(b) - \omega(a)$$

边界是两个点

Stokes 公式 (*) 是微积分这门学科的一个顶峰，它使微积分从古典走向现代，是数学中少有的简洁、美丽而深刻的定理之一。

“更有力的工具和更简单的方法”

poincaré 引理

ω :   0 - form

$\omega = f$, $ddf = 0$

$\downarrow$

$\nabla \times \nabla f = 0$

$$ddf = d\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)}_{1\text{-form}}$$

$$= \left(\cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}dz\right)dx$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}dy} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}dz\right)dy$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}dy + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z}dz}\right)dz$$

$dx_i \wedge dx_i = 0$

w_1 : 1-form

$$w_1 = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

记 $\vec{u} = (P, Q, R)$

$$dd\,w_1 = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$$

$$\begin{aligned}
dw_1 = {} & \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right) dx \\
& + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right) dy \\
& + \left(\frac{\partial R}{\partial x} dx + \frac{\partial R}{\partial y} dy + \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dz \\
= {} & \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx \\
& + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy \\
= {} & \nabla \times \vec{u}
\end{aligned}$$

(另外两项消去)

$$\begin{aligned}
d\,dw_1 = {} & \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dx \right) dy\,dz \\
& + \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dy \right) dz\,dx
\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right)dz\right)dx\,dy$$

$$=\nabla\cdot(\nabla\times\vec{u})=0$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(\nabla\times\vec{u})_x+\frac{\partial}{\partial y}(\nabla\times\vec{u})_y+\frac{\partial}{\partial z}(\nabla\times\vec{u})_z$$

poincaré 引理之逆　若 w 是一个 p 次外微分形式，且 $dw=0$，则存在一个 $p-1$ 次外微分形式 ∂，使得 $w=d\partial$

讨论：$\vec{v}$ 为有势场的充要条件是 $\vec{v}$ 为无旋场

即 $\vec{v}=\operatorname{grad} f$ 的充要条件是

$$\nabla\times\vec{v}=0$$

$$dw=0,\quad w=d\partial$$

一次外微分形式的外微分是零，此外微分形式一定是一个函数（零次外微分形式）的外微分

同样的，如果 $\vec{v}$ 为旋度场当且仅当 $\vec{v}$ 为无源场，

$\vec{v} = \mathrm{rot}\,\vec{b}$ 当且仅当

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0$$

$d\omega = 0$，$\omega = d\alpha$

如果二次外微分形式的外微分是零，则此外微分形式一定是一个一次外微分形式的外微分

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{b}) = 0$$

$\vec{b}$ 是一次外微分

$\nabla\times\vec{b}$ 是二次外微分

龚昇教授以其敏锐的目光指出了微积分的核心是单变量的 Newton-Leibniz 微积分基本定理以及多变量的 Stokes 公式，可谓切中要害，并使高等院校的初学者得以轻松地登堂入室。

——吴文俊

多变量微积分与单变量微积分的根本差别在于前者有外微分形式。

——陈省身