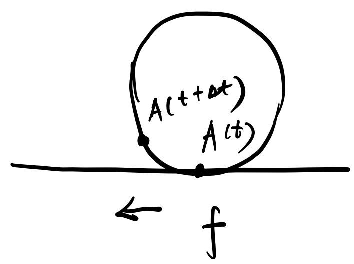
1° 静摩擦:

point contact



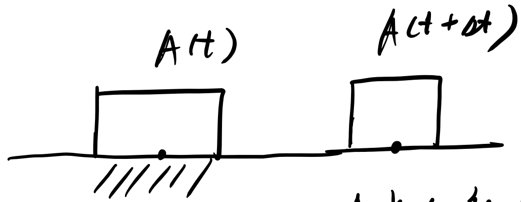
如果可以标成不同的颜色
(不同的点) ↓ 转一圈

彩带

如果可以每个质点
(外表) 标记不同的颜色
在转动中, $[0, 2\pi)$
A点只在地面上留下了
一个点。

点 → 点

2° 滑动摩擦: 相对位移



A点的颜色覆盖一条线

点 → 线

"滚动摩擦"

力偶矩 + 静摩擦(力)

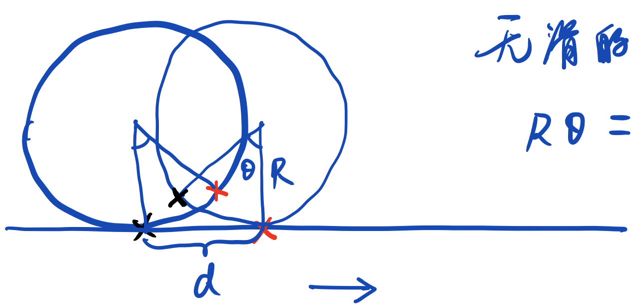
静摩擦力做功吗?

刚性轮在粗糙刚性水平面上，会停吗?

轮子减速：　静摩擦力使 translation 减速

力偶矩使 rotation 减速

匹配 rolling without slipping



无滑的几何约束

$R\theta = d$

rolling without slipping again

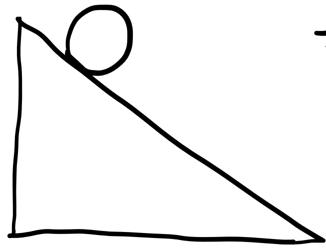
与 $\vec{v}$ 反向

$\uparrow$

$v - \omega R = 0$

$\downarrow$

质心下降（沿斜面向下）



$\vec{F}\cdot\vec{v} = 0$

contact point $\vec{v}=0$

接触点速度为0

可以假设如果没有摩擦力，没有滚动，

那 contact point $\vec{v} \neq 0$，开始相对摩擦.

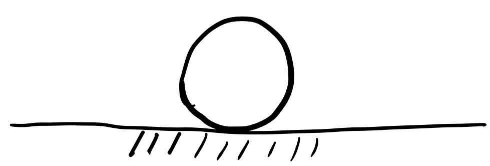
$(\vec{r}\times\vec{F})\cdot d\theta$ 做正功（对转动）

$\vec{F}\cdot d\vec{s}$ 做负功（对平动）

静摩擦力不做功（点 $\rightarrow$ 点）

$\vec{F}$ 实现平动动能和转动动能的互相转化

回到平面：



$\vec{F}_{fri} = \vec{F}_{合外力}$（水平方向）

$t=0$，$\vec{v}>0$，$\vec{\omega}=0$

$\vec{F}_{fri}=m\vec{a}_c<0$，$\vec{r}\times\vec{F}_{fri}$ 开始转动，$\vec{F}_{fri}$ 将实现平动转动能量转换。

匹配 $v=\omega R$，匹配后 $\vec{F}_{fri}=0$，否则平动减速，转动加速，$v_c<\omega R$，$\vec{F}_{fri}$ 将反向。

刚性轮在刚性粗糙水平面永远匀速滚滑（rolling without slipping）必须引入形变才能减速。

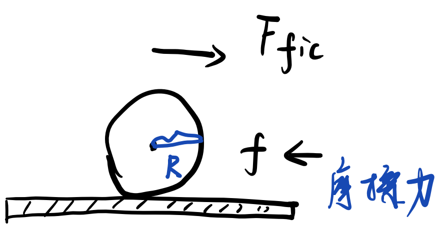
$\boxed{\text{自行车：}}$

脚蹬与后轮连接，前轮无连接，蹬车力矩施加到后轮，后轮触地处，相对于地面向后，摩擦力阻碍相对运动，$\vec{F}_f$ 向前。

对于前轮，自行车滑动向前，$\vec{F}_f$ 向后阻止相对运动，则如提供力矩完成和后轮相同角速度的转动（没有打滑，车身没有散架）

E.g. 非惯性系上的"有滚无滑"：

板上（非惯性系）向左加速，相对于地面大小为a，问圆柱体相对地面运动？



板上观测者使用 2nd Newton's law

需补假想力 $\vec{F}_{fic} = -m\vec{a}$（向右）

（选向右为正方向）

$$\vec{F}_{fic} + \vec{f} = m\vec{a}'$$

translation

friction direction：

阻碍相对运动，向左

$$ma - f = ma'$$ (向右为正方向)

$$fR = I\alpha$$ rotation

$$= \frac{1}{2} mR^2\alpha$$

(圆柱体相对于板)

"有滚无滑" geometry

向右 $\longrightarrow$

$$a' = R\alpha$$

$$\boxed{a' = \frac{2}{3}a}$$

非惯性系 observer:

地面 observer: $-a + a' = -\frac{1}{3}a$

向左加速

注意 惯性系与非惯性系的关联

补假想力 $(\vec{F} = -m\vec{a})$ 完成你对自己身处非惯系 ($\vec{a}$)

使用牛顿第二定律的"补丁"。

三个例子比较: $\frac{2}{3}g$, $\frac{2}{3}g\sin\theta$, $\frac{2}{3}a$

(rolling without slipping for contact surface)

瞬心：瞬时转动中心

（没有相对平动）

任一瞬时 $\exists\ O'$ 刚体围绕此点旋转

（刚体够大）$\vec{V}_{O'}=0$ 否则刚体要变形（两点间距离改变）

$$\frac{d(v-\omega R)}{dt}=0 \Rightarrow a=R\partial\ (可变)$$

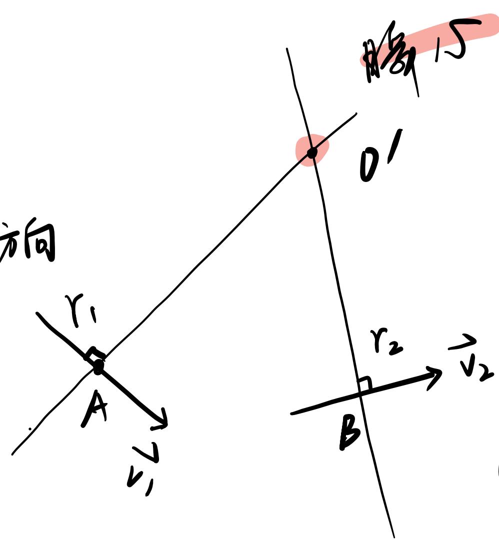
瞬心：

速度0

加速度为0

$\vec{V}_{瞬心}=0$

$\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$ 都是速度，也是相对于瞬心的速度



任选两点，速度方向的垂线（分别过这两点）的交点

不知道质心，

（相对瞬心只有转动）

$\vec{v}_{1,2}=\vec{\omega}\times\vec{r}_{1,2}$

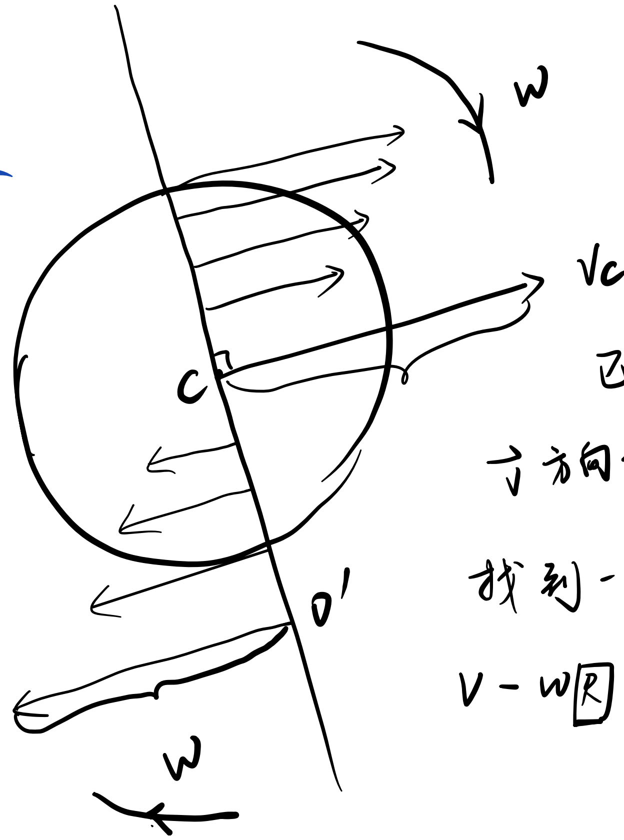
是质点1，2的速度

（相对于地面）

A，B处于同一转动平面

对于刚体，任选两点，它们之间的相对运动只能是转动吗？

瞬心？质心？



已知质心C

$\vec{v}$ 方向垂线穿过质心

找到一个点 O'

$v - w\boxed{R} = 0$

力 $\vec{F}_{ex}$ ： 平动

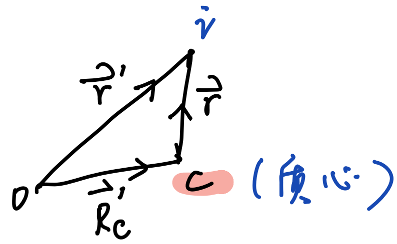
力矩 $\vec{r} \times \vec{F}_{ex}$ ： 转动

$$\vec{F}_{ex} = m\vec{a}_c = \frac{d\vec{P}_c}{dt}$$

外力

$$\vec{r} \times \vec{F}_{ex} = \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$ → 相对于质心的角动量

相对于质心　　相对于质心的力矩



prime: 相对于 O

without prime: 相对于 C

$$\sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i$$ (总力矩)

$$= \sum_i (\vec{r}_i + \vec{R}_c') \times \vec{F}_i = \boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i} + \boxed{\sum_i \vec{R}_c' \times \vec{F}_i}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_i \vec{r}_i' \times \frac{d\vec{p}_i'}{dt}$$ (总角动量变化)

$$= \sum_i (\vec{r}_i + \vec{R}_c') \times \frac{d(\vec{p}_i + m_i \vec{v}_c')}{dt}$$

$$= \boxed{\sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}} + \sum_i \vec{R}_c' \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} \quad (=0)$$

$$+ \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \frac{m_i d\vec{v}_c'}{dt}}_{=0} + \boxed{\sum_i \vec{R}_c' \times \frac{m_i d\vec{v}_c'}{dt}}$$

$$\sum_i \vec{R}_c' \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{R}_c' \times \frac{\sum_i d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \vec{R}_c' \times \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (= m\vec{v}_c)$$

质心系，质心速度 $\vec{v}_c = 0$

$$\sum_i \vec{r}_i \times \frac{m_i\, d\vec{v}_c'}{dt} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) \times \frac{d\vec{v}_c'}{dt}$$

$$\underbrace{m}_{= \sum_i m_i} \times \underbrace{\text{质心系质心位矢}}_{\vec{R}_c} = 0$$

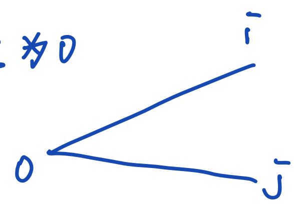
$$\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

$$= \frac{d\vec{L}}{dt}$$

（质心参考系）

$\vec{r}_i$，$\vec{L}$，$\vec{p}_i$ 均是质心参考系度量。

内力矩为0



$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji}$$

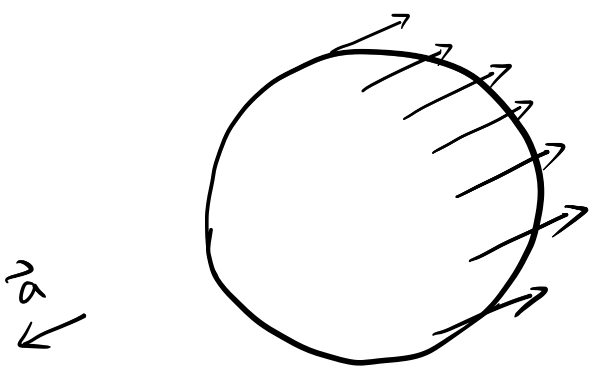
$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

在质心参考系中，假想力的合力矩不造成对于质心的转动

the rotation axis cross the center mass

对 质心加速 $\vec{a}$

$\vec{F}^{i}_{fic} = -m_i \vec{a}$ for all the mass unit



$\sum_i \vec{r_i} \times \vec{F}^{i}_{fic} = -\sum_i \vec{r_i} \times m_i \vec{a}$

$= -\sum_i m_i \vec{r_i} \times \vec{a}$

$= 0$

$\downarrow$ refer to the mass center