vector :

Hermann Weyl (1885 - 1955) German

"universalism" style mathematician

theoretical physicist

philosopher

↓

symmetry : invariant under transformation / operation

物理定律的观察：

平移不变性： 虎溪校园 →

天安门 → 王子屯 (princeton)

观察一个实验，不变。

(homogeneity)

/ˌhəumədʒəˈniːəti/

旋转不变性（isotropy） 各向同性

reference frame 转动后 物理定律不变

矢量在这些要求下应运而生的数学技巧

tail $\longrightarrow$ head   arrow

匹配 displacement，有方向，有大小

unit vector

$\vec{r} = r\hat{r}$ → 方向 (direction)

（手写体） ↓ 长度 (magnitude)

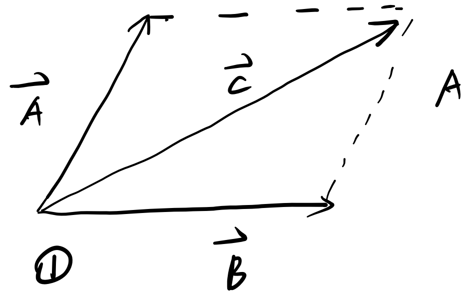
$\mathbf{r}$ (boldface type in print)

$\vec{A} = A\hat{A}$

parallelogram /ˌpærəˈleləɡræm/

平行四边形

law of addition of vectors

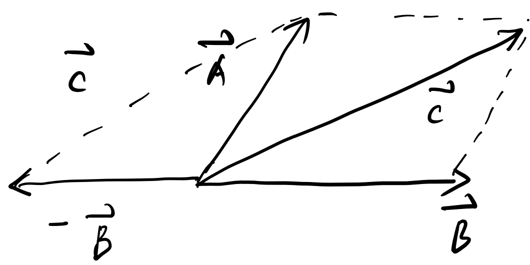


①

$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

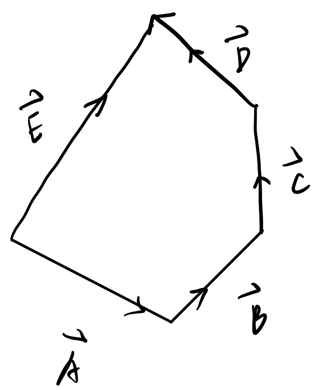
↓

$\vec{A} = \vec{C} - \vec{B}$



②

推演：



$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$

$\vec{B} = k\vec{A}$

↓

常数，缩放

平行四边形法则中，体现了平移不变性，
矢量的大小，方向与其所处位置无关，
这里自包含 Euclidean space（平直空间）

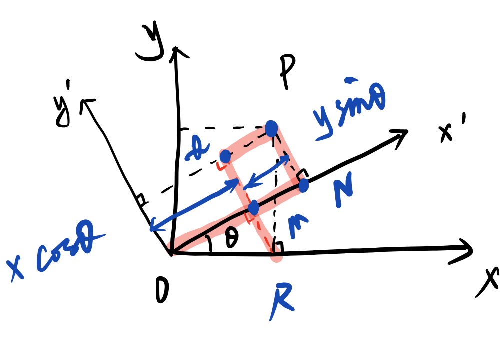
选用 笛卡尔坐标系
（从 $d=2$）开始

$$\vec{r} = r\hat{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$= x'\hat{x}' + y'\hat{y}' \qquad (x', y')$$

（矢量还是那个矢量） 两个分量

有大小，有方向就是矢量吗？



$p:\ (x, y)$

(x', y')

O, O' 重合

reference frame rotates

counterclockwise by θ / theta

$$OM + PQ$$

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta = OM + MN$$

$$y' = y\cos\theta - x\sin\theta = RQ - MR$$

一个矢量要区分坐标系的旋转

即在旋转前后的坐标系中有如上的关系

Q1: 对于一个矢量，转动前后有什么保持不变呢？

长度: $\vec{A}\cdot\vec{A}$ inner product

$= A^2$ dot product

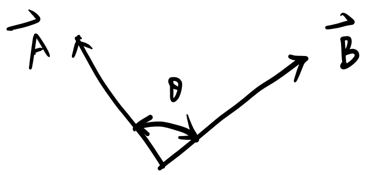
更一般地， $\vec{A}\cdot\vec{B}$ 不变

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{x} + A_y \hat{y}) \cdot (B_x \hat{x} + B_y \hat{y})$$

$$= A_x B_x + A_y B_y$$

$\hat{x} \cdot \hat{y} = \hat{y} \cdot \hat{x} = 0$ (orthogonal)

正交，互相垂直.



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A B \cos\theta$$

Lesser angle

$\vec{A}$ 到 $\vec{B}$，$\vec{B}$ 到 $\vec{A}$ 一样

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

物理学例：　作功 $\vec{F} \cdot \vec{S}$

力乘以在力的方向上的位移

（位移投影到力的方向）

$\cos\theta$

$\vec{A} \cdot \vec{A}$　　　$\vec{B} \cdot \vec{B}$

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

$\vec{c}\cdot\vec{c}$ 亦需保持不变

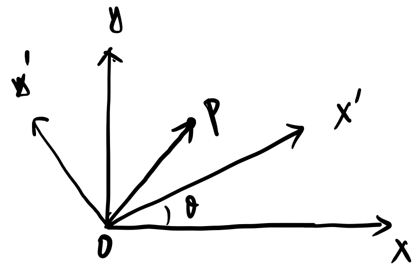
$(\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B})$

$\underbrace{(\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{B}\cdot\vec{A})}_{\downarrow\ \text{保持不变}}+\vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}$

从欧拉公式看矢量旋转：

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

（复数 $\Leftrightarrow$ 三角函数）



在 $x'oy'$ 坐标系里写 $\vec{P}$ 的两个分量 (x', y')

相当于坐标系没有转动，将矢量反向（即顺时针）

转动 θ 角

$$(x'+iy')=(x+iy)e^{-i\theta}=(x+iy)(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=x\cos\theta+y\sin\theta+i(y\cos\theta-x\sin\theta)$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

坐标系转，矢量不动

$\Updownarrow$

坐标系不动，矢量反转

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$$

连续两次转动，

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)}(x+iy) = e^{i\theta}(x+iy)$$

$$\theta = \theta_1+\theta_2$$

可构成一个群，此处不展开

连续两次操作 $\Rightarrow$ 一个操作

$$\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)$$

$$\begin{cases} \cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2 \end{cases}$$

我若通过 trigonometry 方式来写

pseudo vector (axial vector)

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$$

reflection $\xrightarrow[\text{mirror}]{(-1)}$

reflection : (improper rotation)

$$\vec{a} \to -\vec{a}$$

$$\vec{b} \to -\vec{b}$$

$$\vec{c} \to +\vec{c}$$

opposed to true (polar) vector

reflection ↔ mirror image

矢量是按照矢的分量变化关系变化

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = O \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

一个三分量的 xx 变换前后的三分量用 O 变换矩阵连接，xx 是矢量

$\vec{a} \times \vec{b}$ 如果直接以右手螺旋法则放在矢量空间看，已经将其处理为一个矢量。

$\vec{a} \times \vec{b}$ 实际为被 × 定义出的对象

cross product of (two vectors)

Q1: what is a vector?

Q2: why a vector?

矢量空间: 矢量集合

线性空间: 运算性质

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 内积

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ 外积

cross product