非惯性系：

地球是惯性系吗？

傅科摆 (Foucault pendulum)

(球摆 (参考 Bin) + 悬挂点运动)

如果要利用牛顿第二定律

讨论非惯性系，只能引入 F_f

fictitious force 假想力

e.g. 1 公交司机刹车，你相对于车向前加速

Q1：对于地面的人而言，你受力了？

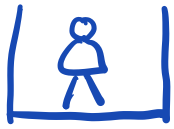
(IF : inertial frame)

Q2：对于公交车，你有相对移动 ($\vec{a}$)

(向公交车行进方向)

$F_f = ma$ (NIF : non-inertial frame)

e.g. 2　　电梯



$\uparrow a$　(地面观测者)

IF:　$F = N - mg = ma$

NIF:　(没有加速，与电梯同步)

$a = 0 = F + F_f$

$F_f = -ma$　(向下)

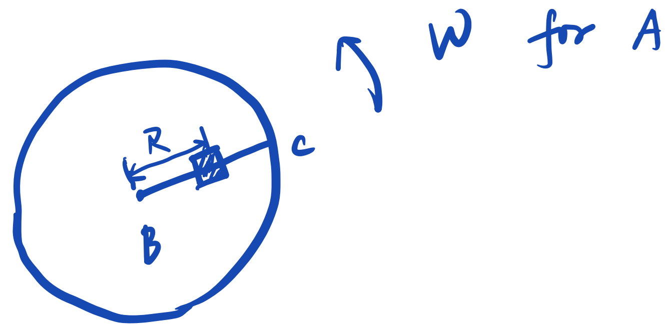
试想：　你在一个封闭电梯里，看到一个苹果往下落去，你能区分以下两种情况吗？

1°　电梯静止，苹果受引力从而下降

2°　苹果静止，电梯以加速度a上升 (outer space)

IF　vs　NIF

e.g. 3



A : 地面观察者 (IF)

B : 圆盘中心 (参考极轴 BC)

▨ object 固定在极轴上

分析：

IF A : $r_I(t) = R$

$\theta_I(t) = \omega t$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2 \frac{d\theta}{dt}\right)\right]\hat{\theta}}$$

$$\vec{a}_I = -\omega^2 r \hat{r}$$

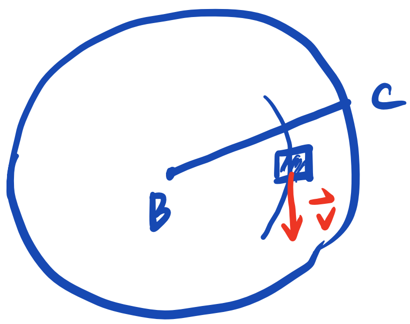
NIF B : $r_N = R$, $\theta_N = 0$

$$\vec{a}_N = 0$$

$$F_f + m\vec{a}_I = m\vec{a}_N$$

$$F_f = m\omega^2 R\,\hat{r}$$ （向心力）

e.g. 4



object 与圆盘无相互作用.

A

IF : A's eye : $r_I = R$

$\theta_I = \theta_0 = \text{const}$

$$\vec{a}_I = 0$$

NIF : B's eye : $r_N = R$, $\theta_N = -\omega t$

$$\vec{a}_N = -\omega^2 r\,\hat{r}$$ （向心）

$\vec{F}_f = m\vec{a}_N$ (向心)

比较 e.g. 3 / 4，$\vec{F}_f$ 居然也大反向！

为什么是这样？见文末推导（不做要求）

$$\boxed{\vec{F}_f = \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cen}}$$

Centrifugal force (离心力)

$\vec{F}_{cor} = -2m(\vec{w} \times \vec{v})$: NIF observer

$\vec{F}_{cen} = -m\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r})$

(IF observer 看到的转动)

in e.g. 3

go further : object 回相对了圆盘并未发生移动

$\vec{F}_{cor} = 0$ Coriolis (科里奥利力)

in e.g. 4

$$\vec{F}_f = \boxed{-2m(\vec{w}\times\vec{v})} \boxed{-m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})} = -\vec{F}_{cen}$$

如图切向

方向一个（向心）　　　　方向↑（离心）

$$(\vec{F}_{cor} = -2\vec{F}_{cen})$$

$$\vec{F}_f = -m\,w^2 R \uparrow \quad (\text{向心})$$

$$(V = wR)$$

对B而言，物块在做圆周运动，这个运动需要向心力，向心力由假想力提供，而假想力分为两个部分：

1° 科里奥利力　$(-2m\,\vec{w}\times\vec{v})$

2° 离心力　$(-m\,\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r}))$

Q：$\vec{w}$ 的方向？

假想力有可观测效应　（e.g. 超重/失重）

（原本就是观测者作假，观测者自己臆补牛顿2nd law）

［注：　ZXF老师选的例3,4，我觉得很有代表性，简洁又能澄清概念］

$\vec{w}$: 非惯性系相对于惯性系的转动

two points:

(1) Centrifugal:

$$-m\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})$$

只要在相对于惯性系转动的坐标系即有 ($\vec{r}=0$ 除外)

(2) coriolis

$$-2m\vec{w}\times\vec{v}$$

$\vec{v}$: 相对于转动的非惯性系而言

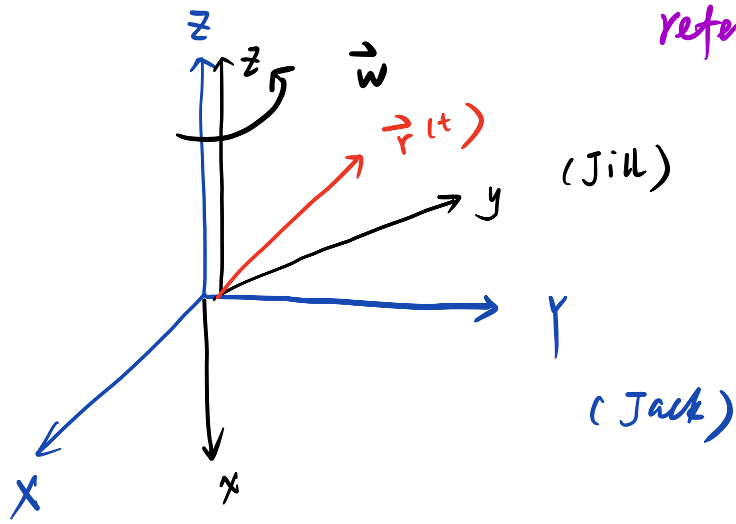
在上述的例子3中，没有$\vec{v}$，因此F_f只有 centrifugal force

$\vec{F}_{IF} = m\vec{a}_{IF}$　　　$\vec{F}+\vec{F}_{fic} = m\vec{a}_{NIF}$

$\vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$　　　$\vec{F}_{fic} = m(\vec{a}_{NIF}-\vec{a}_{IF})$

呼应前文推导 $\vec{F}_f = \vec{F}_{cor} + \vec{F}_{cen}$

refer to LXH



$$\vec{V}(t) \equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jack}$$

$$\vec{v}(t) \equiv \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jill}$$

① $w = 0$

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jack} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jill}$$

② $\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jack} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jill}$ + correction

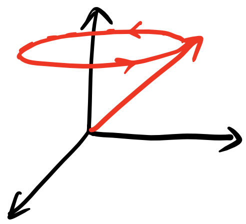
(相对 Jill 静止)

E.g.

Jill : $\vec{r}$ = const 比如 Jill

$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jill} = 0$ 看自己的手

Jack :

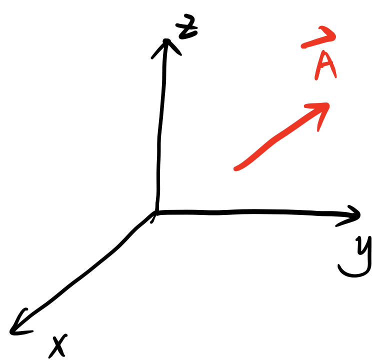


$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{Jack} = \vec{w} \times \vec{r}$$

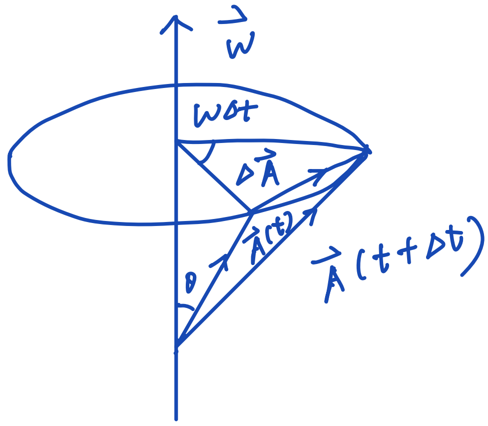
then we have

(矢量的几何关系) $\vec{V} = \vec{v} + \vec{w} \times \vec{r}$ (*)

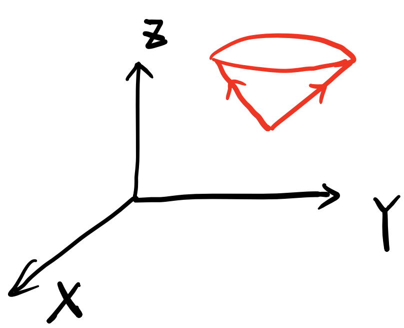
The argument works for all vectors



Jill



$\Delta\vec{A} = (\vec{w} \times \vec{A})\,\Delta t$



Jack

(Jack measure)

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{Jack} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{Jill} + \vec{w}\times\vec{A}$$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{Jack} = \vec{a}_1 \qquad \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{Jill} = \vec{a}_2$$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{Jack} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{Jill} + \vec{w}\times\vec{V}$$

(here, $\vec{V}$ is treated as a vector)

by Eq (*)

$\downarrow$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{Jack} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d(\vec{w}\times\vec{r})}{dt}\right)_{Jill} + \vec{w}\times(\vec{v} + \vec{w}\times\vec{r})$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 + \underset{\substack{\downarrow \\ \text{const}}}{\vec{w}} \times \vec{v}$$

$$+ \ \vec{\omega}\times\vec{v} \ + \ \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$= \vec{a}_2 + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

$$\vec{F} = m\vec{a}_1 \qquad (\text{inertial}$$

$$\vec{F} + \vec{F}_f = m\vec{a}_2 \qquad (\text{non-inertial})$$

$$\vec{F}_f = \underbrace{-2m(\vec{\omega}\times\vec{v})}_{\vec{v}\ \text{dependent}} \underbrace{- m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{r}\ \text{dependent}}$$

站在非惯性系，把自己当成惯性系，
使用牛顿第二定律

我们常常站在 Jack 的角度，做 Jill 的测量。