

第一章 群的基本知识

§ 1.1 群的概念

1.1.1 群的定义

定义： 在**数学对象**集合 G (A, B, C, \dots) 中，定义一种结合法则（群乘）（combination, composition），满足：

(1) 封闭性： $A \in G, B \in G$, 则 $AB \in G$

(2) 结合律： $A, B, C \in G$, 则 $(AB)C = A(BC)$

(3) 集合中有单位元素 $E \in G$, 使得对于任何 $A \in G$, 恒有 $EA = A$

(4) 对于任何的 $A \in G$, 均存在逆元 $A^{-1} \in G$, 使得 $A^{-1} A = E$

问： $\{+1, -1, i, -i\}$ 构成一个群吗？

试讨论以下集合是否构成群：

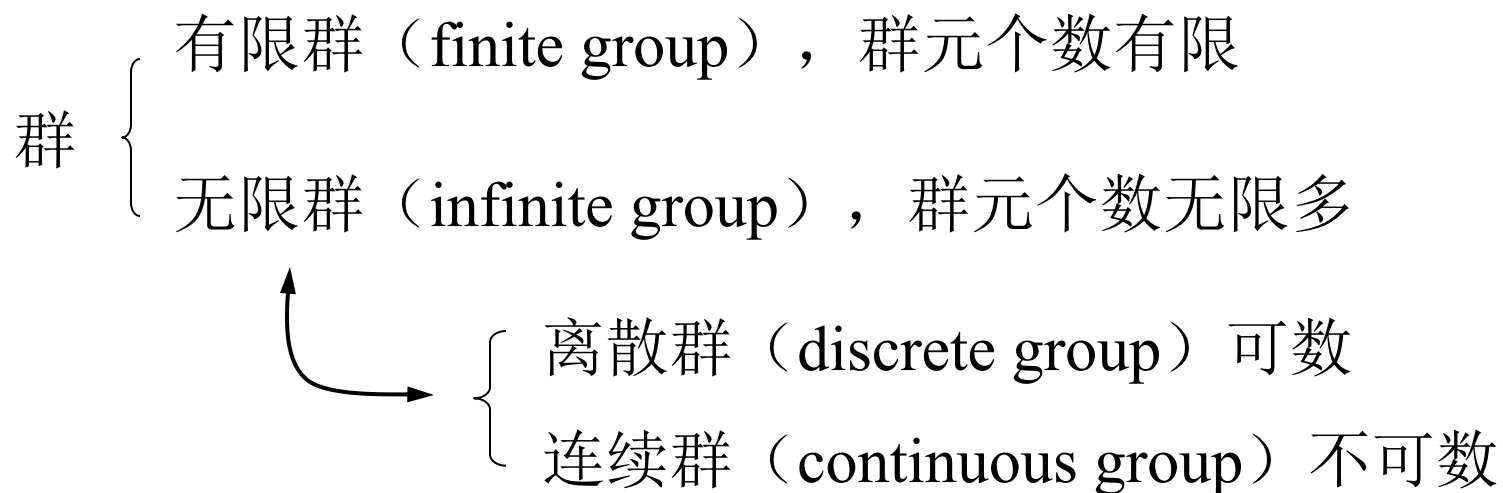
1 全体整数对于数的加法

2 全体实数对于数的乘法

3 $n \times n$ 么正矩阵的全体对于矩阵的乘法

4 满足 $\det A \neq 0$ 全部 $n \times n$ 矩阵的集合

1.1.2 群的种类



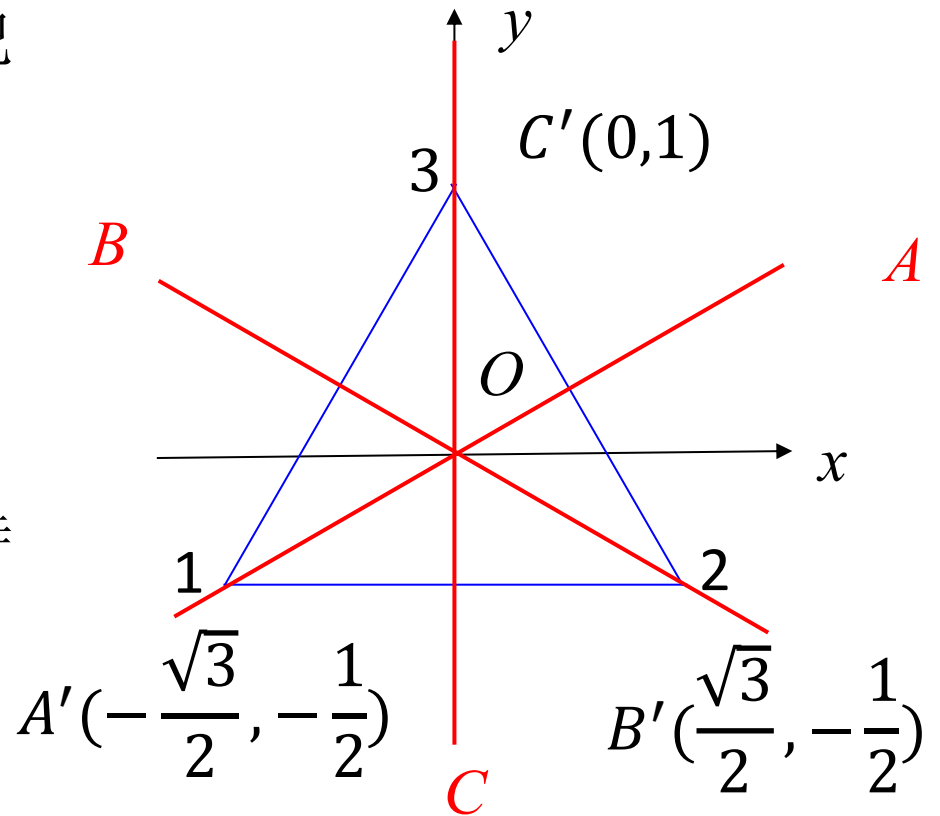
定义: 有限群中元素的数目称为群的阶 (order)

定义: 若群元素之间的结合满足交换律: $AB = BA$, 则该群称为Abel群, 或对易群 (commutation Group)。

实战正三角形对称群 (D_3)

共有六个元素：恒等变换 E ，绕三角形中心 O 点逆时针转 $2\pi/3$ 和 $4\pi/3$ 角的变换 D 和 F ，三角形分别对 A, B, C 轴转动 π 角，记为 A, B, C 。（一个3度主轴，3个与之垂直的2度主轴）

变换前正三角形三顶点标记为 A', B' 和 C' 。经变换，三顶点的位置标记发生变化，但总是分别和初始标记的 A', B' 和 C' 中的某一点重合，三角形的几何视图保持不变。



乘法表

D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

这个乘法表的乘法关系与徐婉棠、喀兴林（高教出版社）
和李新征（北大出版社）的书一样

正三角形对称群恰是 S_3 (或称为 $P(3)$)的几何对应
置换群 (permutation group)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

意为：对 $1, 2, 3, \dots, n$ 重排成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$

S_n ： n 个物体所有这种可能置换的集合称为置换群

这个群对基本粒子的交换对称性有用。

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad E = P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

(更多内容参见 我的个人网站文档 [permutation group](#))

例: S_3 : $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

共 $3!$ 个群元素

S_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	F	D	C	B
B	B	D	E	F	A	C
C	C	F	D	E	B	A
D	D	B	C	A	F	E
F	F	C	A	B	E	D

⚠ 将顶点 (A', B', C') 与数字 (1, 2, 3) 进行映射, 并逆时针排列。

当 A, B, C 转轴固定 (不随顶点变化), 则乘法表如上, D_3 和 S_3 在几何上并不匹配。

不同书的标记使得统一起来变得困难, 但这是常态, 重要的是遵守自己的约定, 保证元素间的乘法关系。

例如：

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ = F$$

注意：置换是先进行右边的置换，再进行左边置换，即从右到左。

∴置换不满足交换律，是非Abel群

S_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	F	D	C	B
B	B	D	E	F	A	C
C	C	F	D	E	B	A
D	D	B	C	A	F	E
F	F	C	A	B	E	D

1.1.4 有限群的性质

1) 重排定理 (rearrangement theorem) (它对无限群不成立)

设群 $G = \{A_1, A_2, \dots, A_k, \dots, A_g\}$ 的阶为 g .

若 $A_i \in G$, 则 (A_i 为 G 中任意元素)

$$A_i G = \{A_i A_1, A_i A_2, \dots, A_i A_k \dots A_i A_g\} \equiv G$$

$$G A_i = \{A_1 A_i, A_2 A_i, \dots, A_k A_i, \dots, A_g A_i\} \equiv G$$

任一元素 $x \in G$, 必在 $A_i G$ 和 $G A_i$ 中出现, 且仅出现一次。

证明: (1) 已知 $A_i \in G, \forall x \in G$, 有
 $A_i^{-1} \in G$, 群乘封闭性要求
 $A_i^{-1}x \in G \Rightarrow x \in A_iG$,
即任一元素 x 必然出现。

(2) x 不能出现两次

若 $A_iA_k = x \in G$, $A_iA_r = x \in G$

得: $A_iA_k = A_iA_r \stackrel{A_i^{-1}}{\Rightarrow} A_i^{-1}A_iA_k = A_i^{-1}A_iA_r$

\therefore

$$A_k = A_r$$

出现矛盾, 一个群里没有重复元素

2) 群元的阶

有限群G, $A \in G$

$A, AA = A^2, A^3, \dots, A^m, \dots, A^r, A^{r+1}$ 由于有限,

\therefore 必有 $A^{r+1} = A$, 即 $A^r A = A$

$\therefore A^r = E$, r 称为该元素的阶

群的阶 V_S 群元的阶

问 $\{+1, -1, i, -i\}$ 中 $i, -i$ 的阶?

r 为满足此式的最小正整数

定义：由群 G 的一个最小的群元的集合（如 A_i, A_j, \dots ）及乘法关系就可以构造出一个群。这个最小的群元的集合中的元就称为群 G 的生成元（generator）。群乘关系称作生成关系。

D_3 群的生成元是 D, A

$$E = A^2, C = DA, B = AD, F = D^2$$

定义：若有限群 G 中的全部元素可由某个 A_i 的幂乘得到，则该群称为循环群（cyclic group）。 A_i ——该群的生成元

1.1.5 群的实例

1) 一阶群: E , 满足 $E^{-1} = E$, 单位元素

2) 二阶群: $\{E, A\}$, $A^{-1} = A$

V_2	E	A		V_2	1	-1
E	E	A		1	1	-1
A	A	E	如	-1	-1	1

所有二阶群的构造均一样

如宇称变换; 全同粒子交换 (费米)

生成元: A ; $\{A, A^2\}$

3) 三阶群: $\{E, A, B\}$

唯一可能 $A^2=B$; 同理 $B^2=A$

∴三阶群唯一可能的乘法表为:

生成元: A ; $\{A, A^2, A^3\}$

B ; $\{B, B^2, B^3\}$

G	E	A	B
E	E	A	B
A	A	B	E
B	B	E	A

一阶、二阶、三阶群均是Abel群，也是循环群。

例： $x^3 - 1 = 0$ 的三个根

1, $\frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 组成三阶群（一般乘法）

例；对称操作 c_3 （即绕一固定轴转 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$ ）也构成三阶群

问：模（绝对值）为1的复数全体对于数的乘法是否构成群？

4) 四阶群: $\{E, A, B, C\}$

i) A, B, C 中, 一个自逆 B , 另两个互逆 A, C 。

乘法表示:

C_4	E	A	B	C	
E	E	A	B	C	$\Rightarrow \begin{matrix} \{E, C_4, C_4^2, C_4^3\} \\ \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \\ \{+1, +i, -1, -i\} \end{matrix}$
A	A	B	C	E	
B	B	C	E	A	
C	C	E	A	B	
C	C	E	A	B	

, 绕某固定轴转 $\left\{2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

生成元: $A; \{A, A^2, A^3, A^4\}$

$C; \{C, C^2, C^3, C^4\}$

C_4 ——Abel群

(四阶循环群)

ii) A, B, C 均为自逆, $A^{-1} = A, B^{-1} = B, C^{-1} = C$

(注意, 不可能有两个自逆)

乘法表为:

V	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

$$AC = CA = B, BC = CB = A$$

生成元: $A, B; \{A, A^2, B, AB\}$

—— Klein四阶群 V :

证明:

$$A^2 = B^2 = C^2 = E$$

$$BA = AB = C$$

最小非循环群。

(\because 若 $AB = A$, $AB = B$ 则 $A = E$ 或 $B = E$)

同理 $AC = CA = B, BC = CB = A$

V —— Abel群 (4个群元全部自逆, 四阶反演群)

§ 1.2 子群 (subgroup) , 陪集 (coset) ,

1.2.1 子群

定义: 若某群中的一些元素的集合S按原来的乘法规则也构成群, —— S: 子群。

任何群的单位元素构成子群 }
G的全体也构成G的子群 } →非真子群 (平庸子群)

真子群 (群元个数大于1小于群阶) :

只需证明封闭性: $SS = S$

1.2.2 陪集

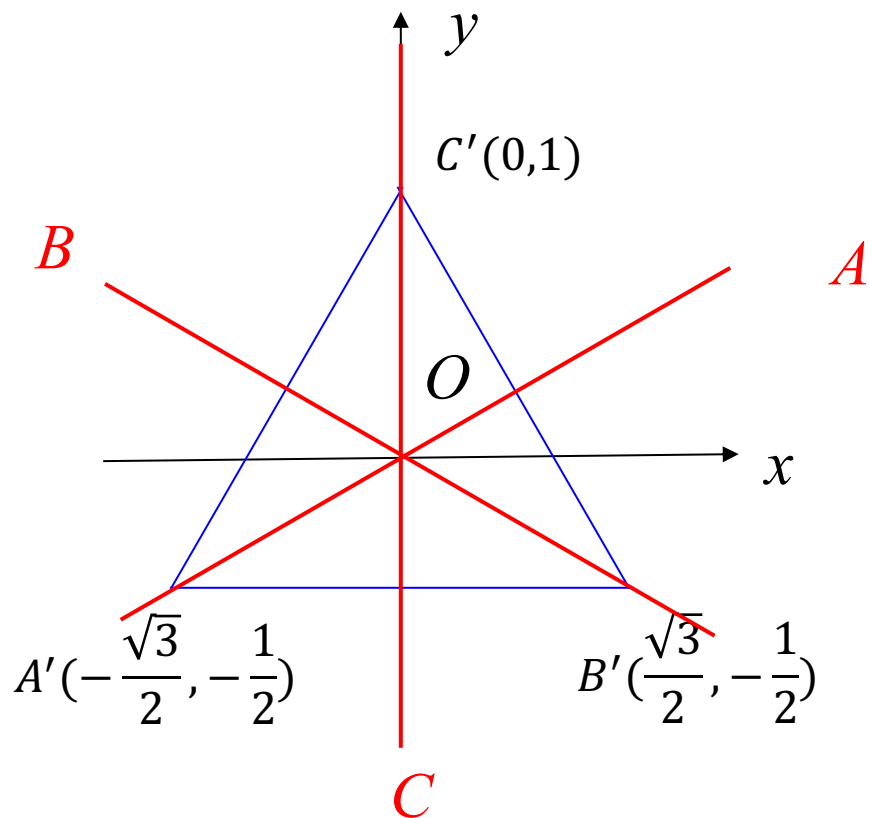
定义： 群中 G 有一个子群 $S\{S_1, S_2, \dots, S_s\}$ ，有一群元 $x \in G$ ， $x \notin S$
集合 $xS = \{xS_1, xS_2, \dots, xS_s\}$ 称为 S 的左陪集（left coset），
 $Sx = \{S_1x, S_2x, \dots, S_sx\}$ 称为的右陪集（right coset）。

注： 如果 $x \in S$ ，则 $xS = Sx = S$ 为子群本身。

例： D_3 群中，子群 $\{E, D, F\}$ 只有一个陪集 $\{A, B, C\}$

子群 $\{E, A\}$ 对 B 的右陪集为 $\{B, D\}$ ，左陪集为 $\{B, F\}$

对 C 的右陪集为 $\{C, F\}$ ，左陪集为 $\{C, D\}$



D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

定理: (1)子群 S 的两个左 (右) 陪集, 或者包含相同的一组元素, 或者没有共同元素。

证: $xS\{xS_1, xS_2, \dots, xS_i, \dots, xS_s\}$ $yS\{yS_1, yS_2, \dots, yS_i, \dots, yS_s\}$

假如: $xS_i = yS_j$, 则有作 $x^{-1}(\quad)S_j^{-1}$

$$x^{-1}xS_iS_j^{-1} = x^{-1}yS_jS_j^{-1} \quad \therefore S_iS_j^{-1} = x^{-1}y$$

$$\therefore S_iS_j^{-1} \in S, \quad \therefore x^{-1}y \in S, \quad \therefore x^{-1}yS = S$$

$$\text{即 } yS = xS$$

(2) 若 x 不是 S 的一个元, 那么 Sx (xS) 不是一个群。

(3) G 中的每一个元必然落在子群或某一个左 (右) 陪集中。

(4) 若子群 S 的阶为 s ， G 的阶为 g ，则每一个左（右）陪集包含 s 个不同的元，即在集合 Sx (xS)的 s 个元中，没有相同的元存在。

(5) 若 $y \in Sx$ ，则有 $Sx = Sy$

角度1: $Sy \in SSx = Sx$

角度2: $y = Ey = S_1y \in Sy$ (子群 S 的第一个元素即为单位元)
而 $y \in Sx$ ，两个陪集有一个公共元，必然全体相等。

陪集中的任意元都可取为“陪集代表元”

Lagrange定理: 子群 S 的阶(s)必定能够整除整个群 G 的阶(g)。

证: 若 S 遍举群 G 的全部元素, 则 $s = g$, 故 $g/s = 1$; 若不能遍举,

作 A_1S , 且 A_1S 与 S 无共同元素。若 $S+A_1S$ 遍举 G 所有元素, 则 $g/s = 2$ 。若不能, 作 A_2S , 且它与 S, A_1S 无共同元素, 若 $S+A_1S+A_2S$ 能遍举 G , 则 $g/s = 3$ 。

因为是有限群, 总有 $G = S+A_1S+ A_2S\dots+ A_{i-1}S$

$\therefore g/s = i$ ($i-1$ 为不同的陪集个数)

例: 证明: 若群的阶为素数, 则该群必为循环群。

证明: 设群的阶为 g , 若某元素 $A: A^r = E$,

若 $r < g$, 则 $g/r =$ 整数, 但 g 为素数, 故必有 $r = g$ 。

注意: 陪集并不构成群。

讨论：群阶为5的群的乘法表？

一个群阶为质数的群，必为循环群。

1.3 共轭元素 (conjugate) 和类 (class)

定义: $A, B \in G$, $\exists x \in G$, 满足 $xAx^{-1}=B$, 则称 B 是 A 的共轭元素 (conjugate) 。

性质: 1) 共轭关系是相互的

$$A = x^{-1}Bx \Rightarrow B = xAx^{-1}$$

2) 共轭关系具有传递性

$A, B, C \in G$, 若 A, B 分别与 C 共轭, $A = xCx^{-1}, B = yCy^{-1}$,

则 A 和 B 共轭: $\because A = xCx^{-1} \Rightarrow C = x^{-1}Ax$

由 $B = y(x^{-1}Ax)y^{-1} = (yx^{-1})A(xy^{-1})$
 $= (yx^{-1})A(yx^{-1})^{-1}, yx^{-1} \in G$

$\therefore A$ 和 B 共轭

3) 任何元素与自身共轭: $A = EAE^{-1} = A$

$$A = AAA^{-1} = A$$

定义： 群 G 中互相共轭的元的完全集合称为类（class），类中元素的数目称为类的阶。 $\{xCx^{-1} = C, \forall x \in G\}$

（相似变换的 $x()x^{-1}$ 中的 x 对类中不同元素是可以不一样的， x 要取遍整个 G ）

∴ 只要给出类中任意一个元素就可求得类中所有元素。

单位元素自成一类，这是因为 $xEx^{-1}=E$

任意 x

普遍地，若 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n$ 是一类，对任一 $x \in G$ ， xA_jx^{-1} 必定在集合 $\{A_1, \dots, A_n\}$ 内，但此集合不构成群。

例: D_3 群有三个类:

1) E 自成一类, 因为它与所有元素可对易

2) D, F 组成一类, 因 $EDE^{-1} = D, ADA^{-1} = F, BDB^{-1} = F,$
 $CDC^{-1} = F, FDF^{-1} = D, DDD^{-1} = D$

3) A, B, C 组成一类, 因 $ECE^{-1} = C, ACA^{-1} = B, BCB^{-1} = A,$
 $CCC^{-1} = C, DCD^{-1} = A, FCF^{-1} = B$

D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

- 性质：**
- 1) 单位元素 E 自成一类
 - 2) 不同的类中没有共同的元
 - 3) 除单位元这一类外，其余各类都不是子群
 - 4) Abel群的每个元素自成一类

$$xAx^{-1} = Axx^{-1} = A$$

- 5) 同一类中的所有元素都具有相同的阶。

(n 是 A 元素的级，若 $A^n = E$)

证：若 $A^n = E$ ，则

$$\begin{aligned}(xAx^{-1})^n &= xAx^{-1} \cdot xAx^{-1} \cdots xAx^{-1} \\ &= xA^n x^{-1} = xEx^{-1} = E\end{aligned}$$

6) 对于矩阵群，同一类中的各元互为相似矩阵，因此，同类中各元具有相同的迹。

7) 若 C 是群 G 的一个类， C' 是 C 中所有元的逆的集合，那么， C' 也是群 G 的一个类，称为 C 的逆类。

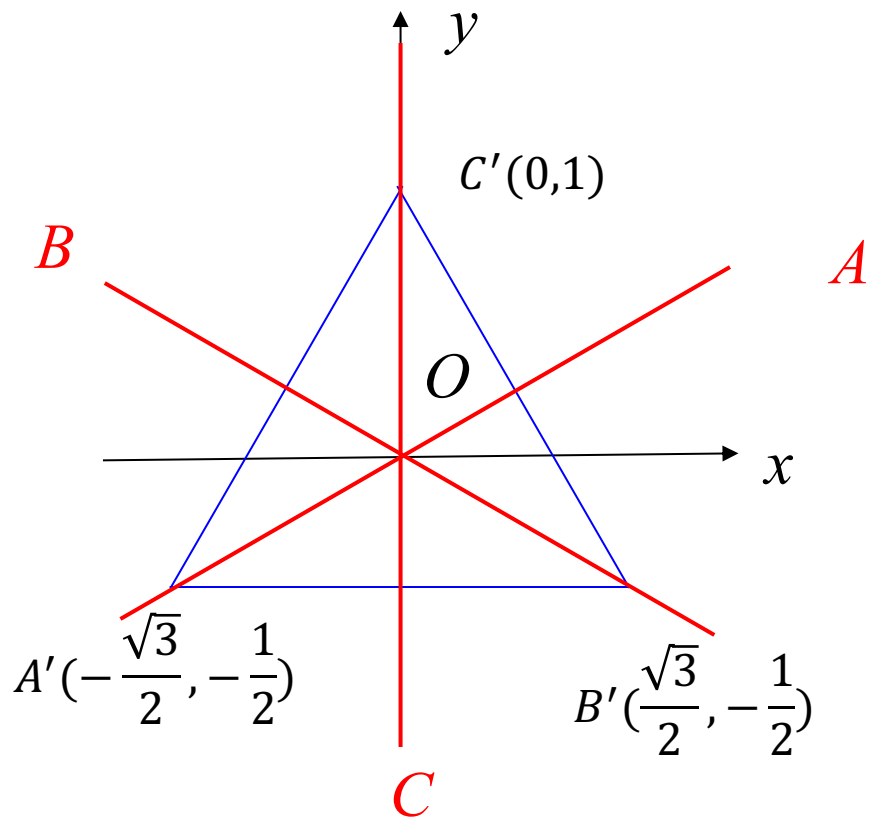
已知 $xCx^{-1} = C$ 对 $\forall x \in G$ 成立

则有 $xC'x^{-1} = xC^{-1}x^{-1} = (xCx^{-1})^{-1} = C^{-1} = C'$ 对 $\forall x \in G$ 成立

8) 含转动操作的群, 转角相同转轴可由群中的元转成一致的, 属于同一类。

问: 哪些元素同类?

$\{A, B, C\}$
 $\{D, F\}$



类的有关定理:

定理一: 若 η 为由群中若干完整的类构成的集合, 即

$$\eta = C_1 + C_2 + \cdots = \sum_k C_k$$

x 是群中的任意元, 则 $x\eta x^{-1} = \eta$ 成立

逆定理:

任何一个服从关系 $x\eta x^{-1} = \eta, \forall x \in G$ 成立的集合 η ,
必由若干个完整的类构成。

定理二： 两个类的类乘有 $C_i C_j = \sum_k C_{ijk} C_k$

为整数，说明 C_k 在类乘 $C_i C_j$ 中出现的次数

类乘：两个类的类乘为一个集合，由两个类中的元两两相乘而得，如集合中有重复的元，出现几次算几次

证明： $x C_i x^{-1} = C_i, x C_j x^{-1} = C_j$

则有 $C_i C_j = x C_i x^{-1} x C_j x^{-1} = x C_i C_j x^{-1}$

由上述逆定理可知， $C_i C_j$ 必由完整的类构成，得证。

练习：正三角形 D_3 群的类乘

三个类： $C_1 = E, C_2 = \{A, B, C\}, C_3 = \{D, F\}$

$$C_1 C_2 = C_2, C_1 C_3 = C_3, C_2 C_3 = 2C_2$$

$$C_2 C_2 = 3C_1 + 3C_3,$$

$$C_3 C_3 = 2C_1 + C_3$$

定理三:

有限群 G 的阶为 g , 类 C 的元数为 h_c , 则有 $g/h_c = \text{整数}$

证明:

1, 取 $x \in G$, 取 $S \in G$, 满足
 $SxS^{-1} = x$ 的所有元的集合 $\{S\} = S^x$

证明 S^x 是一个群

设 $S_i, S_j \in S^x$, 则 $S_i x S_i^{-1} = x$, $S_j x S_j^{-1} = x$

$S_i S_j x (S_i S_j)^{-1} = S_i S_j x S_j^{-1} S_i^{-1} = x$

$\therefore S_i S_j \in S^x$, 封闭, 构成群。

2, 将群 G 按照 S^x 的陪集来分解

$$G = S^x + R_1S^x + R_2S^x + \cdots + R_{i-1}S^x$$

$R_1, R_2, \cdots, R_{i-1}$ 为陪集代表元

作 x 的共轭元, $R_1xR_1^{-1}, R_2xR_2^{-1}, \cdots, R_{i-1}xR_{i-1}^{-1}$

证明: 全部与 x 共轭的元素有 i 个, 即 $h_c = i$

(1) 用属于同一个陪集内的元 R_m, R_n 做 x 的共轭元, 则有 $R_m x R_m^{-1} = R_n x R_n^{-1}$

$$R_m, R_n \in R_m S^x,$$

$$\text{设 } R_n = R_m S_g, S_g \in S^x$$

$$\begin{aligned} R_n x R_n^{-1} &= R_m S_g x (R_m S_g)^{-1} = R_m S_g x S_g^{-1} R_m^{-1} \\ &= R_m x R_m^{-1} \end{aligned}$$

(2) 反过来, 如果 $R_m x R_m^{-1} = R_n x R_n^{-1}$, 则 $R_m, R_n \in R_m S^x$
 将 $R_m^{-1}()$ 作用于等式两边, $x = R_m^{-1}(R_n x R_n^{-1})R_m$

$$\therefore R_m^{-1} R_n \in S^x \Rightarrow R_n \in R_m S^x$$

来自于同一个陪集

(3) $i = h_c = g/s$ ($s: S^x$ 群的阶)

正三角形 D_3 群的三个类

三个类: $C_1 = E, C_2 = \{A, B, C\}, C_3 = \{D, F\}$
 $SxS^{-1} = x$ 的所有元的集合 $\{S\} = S^x$

$x = D, F, \rightarrow \{E D F\} = S^D = S^F$
只有一个陪集为 $\{A B C\}$,

选一个陪集代表元, 比如A,
 $ADA^{-1} = F \neq D, \quad AFA^{-1} = D \neq F$
 $\therefore A \notin S^D, A \notin S^F$

1.4 共轭子群 (conjugate subgroup)

和正规子群 (不变子群: normal subgroup)

定理: 若 S 为 G 的子群, 则 $\{ASA^{-1}, \forall A \in G\}$ 是一个子群, 称作

群 G 的共轭子群。 $H'_1 = AH_1A^{-1}$

证: $H_1, H_2 \in S$, 作 $H'_1 = AH_1A^{-1}$, $H'_2 = AH_2A^{-1} \in ASA^{-1}$

1) 封闭性: $\underbrace{AH_1H_2A^{-1}}_{\in S} = AH_1A^{-1}AH_2A^{-1} = H'_1H'_2 \in ASA^{-1}$

2) 单位元素: $E = AEA^{-1} \in ASA^{-1}$

3) 逆元: $(H'_1)^{-1} = (AH_1A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^{-1}H_1^{-1}A^{-1} = AH_1^{-1}A^{-1}$

$\because H_1^{-1} \in S$, $\therefore AH_1^{-1}A^{-1} \in ASA^{-1}$

例:

D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

其中, E, B 构成子群 $S = \{E, B\}$, 且: $AEA^{-1} = E$

$$ABA^{-1} = DA = C$$

$\therefore \{E, C\} = ASA^{-1}$ 构成子群

定义: S 是 G 的子群, $\{ASA^{-1} = S, \forall A \in G\}$ 则 S 称为 G 的不变子群或正规子群 ($ASA^{-1} = S \Rightarrow AS = SA$:左陪集合相应右陪集相等) 。

例: $\{1, -1\}$ 是它的不变子群:

G	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

同理

$$\begin{array}{ll}
 1 \cdot 1 \cdot (1)^{-1} = 1 & 1 \cdot (-1)(1)^{-1} = -1 \\
 -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{-1} = 1 & (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)^{-1} = -1 \\
 i \cdot 1 \cdot (i)^{-1} = 1 & i \cdot (-1)(i)^{-1} = -1 \\
 -i \cdot 1 \cdot (-i)^{-1} = 1 & -i \cdot (-1)(-i)^{-1} = -1
 \end{array}$$

例:

D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

其中, E, D, F 构成正规子群 $S = \{E, D, F\}$

$$\because AEA^{-1} = E; ADA^{-1} = BA^{-1} = F; AFA^{-1} = CA^{-1} = D$$

$$\because ASA^{-1} = S$$

同理计算可得 $BSB^{-1} = S, CSC^{-1} = S$

正规子群的性质：

群 G 的正规子群由 G 的一个或几个完整的类构成，反之，凡包含 G 中一个类或几个完整类的子群都是 G 的正规子群。

$$1) S_m \in S$$

$$\forall x \in G, xS_mx^{-1} \in S$$

$\therefore S_m$ 的整个类都在 S 里。

$$2) S = C_1 + C_2 + \dots$$

$$\forall x \in G, xSx^{-1} = xC_1x^{-1} + xC_2x^{-1} + \dots$$

$$= C_1 + C_2 + \dots = S$$

$\therefore S$ 为正规子群

1.4.1 同构 (isomorphism) 和同态 (homomorphism)

定义: 若群 G' 和 G 的所有元素间均按某种规律存在一一对应关系, 它们的乘积也按同一规律一一对应, 则称两群同构 (双射性, Bijectivity)。

即: 若 $R, S \in G; R', S' \in G'; R' \leftrightarrow R, S' \leftrightarrow S$, 必有 $R'S' \leftrightarrow RS$, 则 $G' \approx G$ 。

“ \leftrightarrow ” —— 一一对应, “ \approx ” —— 同构

对 G 的所有定理, 对 G' 也成立, 因此, 在群论中, 所有同构的群均被看作同一群。

例: 所有二阶群都同构于二阶反演群 V_2

例: Z_3 ($\{0,1,2\}$: 模3加法, addition modulo 3) 和 C_3 (3度旋转群) 同构。所有3阶群都同构, 只有一种乘法表。

子群 S 和它的共轭子群 ASA^{-1} 是同构的

例:

D_3	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

其中, E, B 构成子群 $S = \{E, B\}$, 共轭子群 ASA^{-1} 为

$$\{E, C\} = ASA^{-1}$$

两者同构

定义： 如果群 G 的任一个元素 A 都唯一地对应于群 G' 的一个元素 A' ，而群 G' 中的一个元素对应于群 G 的元素不只一个，并且如果对应于 $AB = C$ ，就有 $A'B' = C'$ ，则称 G' 同态于 G ，记为 $G' \sim G$ 。

即

$$G = \{A_1, A_2, \dots B_1, B_2, \dots C_1, C_2, \dots\}$$

$$G' = \{A', \dots B', \dots C', \dots\}$$

$$A_1 \rightarrow A', B_1 \rightarrow B', \dots$$

$$A_2 \rightarrow A', B_2 \rightarrow B', \dots$$

且 $A_i B_j = C_k$ 均对应于 $A' B' = C'$

同态核定理:

若 $G' \sim G$, 分别与 G' 中单位元 E' 相对应的 G 中元素的集合 P 构成群 G 不变子群, P 称为同态对应的核。

证明:

(1) 若 $A \rightarrow E', B \rightarrow E'$, 则 $AB \rightarrow E'E' = E'$, 即对 $\forall A, B \in P$, 有 $AB \in P$, P 具有封闭性, 因此是群 G 的子群。

(2) 若 $A \in P, C \in G$, 而 $C \rightarrow C' \in G'$, 则

$$CAC^{-1} \rightarrow C'E'C'^{-1} = E' \text{ 对一切 } C \text{ 成立}$$

这就是说 $CPC^{-1} \in P$ 对一切 $C \in G$ 成立。

所以 P 是 G 的正规/不变子群。

例:

$$\begin{array}{ccc}
 & G' & G \\
 & & \begin{array}{cccccc}
 & & & & 1 & -1 & i & -i \\
 & & & & 1 & -1 & i & -i \\
 & & & & -1 & -1 & -i & i \\
 & & & & i & i & -i & -1 & 1 \\
 & & & & -i & -i & i & 1 & -1
 \end{array} \\
 \begin{array}{ccc}
 & 1 & -1 \\
 1 & 1 & -1 \\
 -1 & -1 & 1
 \end{array} & \sim &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 +i \rightarrow -1 \\
 -i \rightarrow -1
 \end{array}$$

其中 $\begin{matrix} +1 \\ -1 \end{matrix}$ 称为同态对应的核 core

$$\begin{array}{l}
 +1 \rightarrow +1 \\
 -1 \rightarrow +1
 \end{array}$$

G 中与 G' 中单位元 E' 对应的那些元称为这一同态关系的同态核。

1.4.2 商群 (quotient group)

定义： 将群 G (g) 按照正规子群 S (s) 进行分解 (陪集), 所得到的元素集合 (即 S 及其所有陪集) 当作元素:
 G 按 S 分解所得的商群。

$$\bar{G} = \frac{G}{S} = \{S, SA_2, \dots, SA_i\}, \quad i = \frac{g}{s}$$

“数学对象”：陪集

验证群：

$$(1) SA_m SA_n = SSA_m A_n = SA_m A_n$$

$$(2) (SA_m SA_n) SA_p = SA_m A_n A_p = SA_m (SA_n SA_p)$$

问商群的单位元、逆元？

$$(3) SSA_m = SA_m$$

$$(4) SA_m \rightarrow SA_m^{-1}$$

商群乘法表

	S	AS
S	S	AS
AS	AS	S

$$S = \{E, D, F\},$$
$$AS = \{A, B, C\}$$

例:

		$E \quad C_6^2 \quad C_6^4$			$C_6 \quad C_6^3 \quad C_6^5$		
	C_6	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
	E	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
	C_6^2	C_6^2	C_6^4	E	C_6^3	C_6^5	C_6
G	C_6^4	C_6^4	E	C_6^2	C_6^5	C_6	C_6^3
	C_6	C_6	C_6^3	C_6^5	C_6^2	C_6^4	E
	C_6^3	C_6^3	C_6^5	C_6	C_6^4	E	C_6^2
	C_6^5	C_6^5	C_6	C_6^3	E	C_6^2	C_6^4
映射 f							
	C_2	1	-1				
	C_2	1	-1				
		-1	-1	1			

绕6次轴: 不转和转 2π 为 E , 转 $2\pi/6$ 为 C_6 , 转 $2\pi/3$ 为 C_6^2 , 转 π 为 C_6^3 , 转 $4\pi/3$ 为 C_6^4 , 转 $5\pi/3$ 为 C_6^5 。

C_6 群同态于 C_2 , S 为 $\{E \quad C_6^2 \quad C_6^4\}$ 是同态的核, 且可以证明: S 是一个正规子群。

如果以 S 来划分 G , 得两阶商群:

$$\bar{G} = \{(E, C_6^2, C_6^4), (C_6, C_6^3, C_6^5)\}$$

且 \bar{G} 与 C_2 同构。

§ 1.5 群的直（接乘）积

定义：设有两个群 G_a （阶为 g_a ）和群 G_b （阶为 g_b ），它们之间元素之积可对易，即： $\forall a_i \in G_a, \forall b_j \in G_b$ ，有

$$a_i b_j = b_j a_i, (i = 1, 2, \dots, g_a, j = 1, 2, \dots, g_b)$$

那么按群 G 的乘法得到的 $g_a g_b$ 个元素（有序对）集合 $\{a_i b_j\}$ 也构成一个群，称为 G_a 和 G_b 的直积群，记为

$G_a \otimes G_b$ ， G_a 和 G_b 称为直积因子。

证：封闭性： $a_i b_j a_{i'} b_{j'} = a_i a_{i'} b_j b_{j'} = a_{i''} b_{j''}, \in G_a \otimes G_b$

逆元： $(a_i b_j)^{-1} = a_i^{-1} b_j^{-1} \in G_a \otimes G_b$

单位元： $E_a E_b = E \in G_a \otimes G_b$

显然： $G_a \otimes G_b = G_b \otimes G_a$

*直积群的不同直积因子（如 a_i, b_j 等）的元素是相互对易的，但同一个直积因子中的元素可不对易（如 a_i, a_j 等）。

如果 G_a 和 G_b 是 G 的子群，且有 $G = G_a \otimes G_b$ ， $a_i b_j = b_j a_i$ 对于 $\forall a_i \in G_a, \forall b_j \in G_b$ 成立：

*直积因子 G_a 和 G_b 都是直积群 $G_a \otimes G_b$ 的正规子群

证明：已知 $E \in G_a, E \in G_b$ ，那么 $\forall b_l \in G_b$ ，取其共轭元

$$(a_i b_j) b_l (a_i b_j)^{-1} = a_i (b_j b_l b_j^{-1}) a_i^{-1} = a_i b_k a_i^{-1} = a_i a_i^{-1} b_k = b_k$$

令 $a_i b_j = x$ ，则 $x G_b x^{-1} = E G_b = G_b$

$\therefore G_b$ 是 $G_a \otimes G_b$ 的正规子群

同理， G_a 也是 $G_a \otimes G_b$ 的正规子群

例:

	C_6	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
	E	E	C_6^2	C_6^4	C_6	C_6^3	C_6^5
	C_6^2	C_6^2	C_6^4	E	C_6^3	C_6^5	C_6
G	C_6^4	C_6^4	E	C_6^2	C_6^5	C_6	C_6^3
	C_6	C_6	C_6^3	C_6^5	C_6^2	C_6^4	E
	C_6^3	C_6^3	C_6^5	C_6	C_6^4	E	C_6^2
	C_6^5	C_6^5	C_6	C_6^3	E	C_6^2	C_6^4

绕6次轴: 不转和转 2π 为 E , 转 $2\pi/6$ 为 C_6 , 转 $2\pi/3$ 为 C_6^2 , 转 π 为 C_6^3 , 转 $4\pi/3$ 为 C_6^4 , 转 $5\pi/3$ 为 C_6^5 。

$$S_1 = \{E, C_6^3\},$$

$$S_2 = \{E, C_6^2, C_6^4\}$$

$$G = S_1 \otimes S_2$$

群的直积是一个
扩大群的方法

*直积群的类: $G = G_a \otimes G_b$

$$(a_{i'} b_{j'}) (a_i b_j) (a_{i'} b_{j'})^{-1} = a_m b_n$$

$$\text{左} = (a_{i'} a_i a_{i'}^{-1}) (b_{j'} b_j b_{j'}^{-1})$$

$$(a_{i'} a_i a_{i'}^{-1}) = a_m ,$$

$$(b_{j'} b_j b_{j'}^{-1}) = b_n$$

直积群的类由群 G_a 的类与群 G_b 的类的乘积形成。

$N_G = N_a N_b$: 类的个数关系

$h_G = h_a h_b$: 每一类中的群元数关系

Exercise 1: calculate $e^{\sigma_x}, e^{i\sigma_x}$

Exercise2: 比较:

伽利略时空变换群（1+1维），
洛伦兹群（1+1维时空），
二维空间转动群

<http://cqutp.org/users/lpyang/Teaching.html>

