

## IV. 正规(regular)表示

向量空间的向量可以是各种各样的数学对象，现在用一个群  $G = \{E, A, B, \dots, R, S, \dots\}$  中的各个群元作为基矢，定义加法、数乘和内积，建立一个向量空间，称为群元空间

群元空间的维度是?  $g$

$\vec{R}$ 与 $\vec{S}$ 之和记为 $\vec{R} + \vec{S}$

不能进一步进行化简，如同三维空间的基矢  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

群元空间中任一矢量

$$\vec{V} = \sum_R \vec{R} V_R,$$

$V_R$ 是矢量 $\vec{V}$ 在基矢 $\vec{R}$ 上的分量。

## 群元空间中的算符

把群元本身当成算符，算符对群元空间中的每个基矢（也是群元）的作用就是群乘得到另一个基矢

$$\widehat{R}\vec{S} = \vec{T}, (T = RS)$$

正规（正则）表示

表示空间为群元空间，群元本身作为此空间的变换算符

$$\begin{array}{ccc} P_R \varphi_\alpha(r) = \sum_{\beta} \varphi_\beta(r) D(R)_{\beta\alpha} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \widehat{R} \quad \quad \vec{S} \end{array}$$

# 正规表示和特征标表

## 正规表示

$C_{3v}$	$E$	$A$	$B$	$C$	$D$	$F$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$	$D$	$F$
$A$	$A$	$E$	$D$	$F$	$B$	$C$
$B$	$B$	$F$	$E$	$D$	$C$	$A$
$C$	$C$	$D$	$F$	$E$	$A$	$B$
$D$	$D$	$C$	$A$	$B$	$F$	$E$
$F$	$F$	$B$	$C$	$A$	$E$	$D$

$$E \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A \\ E \\ D \\ F \\ B \\ C \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

称为A的正规表示  
(regular representation)

$$B \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} B \\ F \\ E \\ D \\ C \\ A \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} C \\ D \\ F \\ E \\ A \\ B \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} D \\ C \\ A \\ B \\ F \\ E \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} F \\ B \\ C \\ A \\ E \\ D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

表示矩阵

$$A_\alpha \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_\beta \\ \vdots \\ A_g \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_\alpha A_1 \\ A_\alpha A_2 \\ \vdots \\ A_\alpha A_\beta \\ \vdots \\ A_\alpha A_g \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_\beta \\ \vdots \\ A_g \end{pmatrix}^T$$

$$D(A_\alpha) = \begin{pmatrix} \sum_r A_r D(A_\alpha)_{r1} \\ \sum_r A_r D(A_\alpha)_{r2} \\ \vdots \\ \sum_r A_r D(A_\alpha)_{r\beta} \\ \vdots \\ \sum_r A_r D(A_\alpha)_{rg} \end{pmatrix}^T$$

此类表示称为（左）  
正规表示。

$$P_R \varphi_\alpha(r) = \sum_\beta \varphi_\beta(r) D(R)_{\beta\alpha}$$

正规表示有如下性质：

1) 正规表示一般是可约的：

$$2) \chi(A_\alpha) = \begin{cases} \sum_r 1 = g & (A_\alpha = E) \\ 0 & (A_\alpha \neq E) \end{cases}$$

$$3) D = \sum_j \oplus a_j D^j, \text{ 而 } a_j = \frac{1}{g} \sum_{R \in G} \chi(R) \chi^j(R)^*$$

对正规表示

$$a_j = \frac{1}{g} \sum_{R \in G} \chi(R) \chi^j(R)^* = \frac{1}{g} \chi(E) \chi^j(E)^* = \frac{1}{g} g \chi^j(E) = m_j$$

即 $D$ 中有 $m_j$ 个相同的表示矩阵 $D^j$ （不可约）

$$a_j = m_j \neq 0$$

每个不可约表示都出现

不可约表示的维数定理：

1，在正规表示中，群 $G$ 的每一个不可约表示都出现，而且每个不可约表示的出现次数等于这个表示的维数。

2，Burnside定理：一个群全部不可约表示的维数的平方和，等于群 $G$ 的阶。

$$m_1^2 + m_2^2 + \cdots + m_r^2 = g$$

证明：

$$g = \chi(E) = \sum_j a_j \chi^j(E) = \sum_j m_j m_j = \sum_j m_j^2$$

↓  
正规表示的维数

# 正交性关系

不可约表示矩阵元

$$\frac{1}{g} \sum_{R \in G} D_{\mu\rho}^i(R)^* D_{\nu\lambda}^j(R) = \frac{1}{m_j} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\lambda}$$

特征标

$$\sum_{R \in G} \chi^i(R)^* \chi^j(R) = g \delta_{ij}$$

对矢量空间的理解

$$\vec{V}^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} V^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} \sqrt{\frac{l_i}{g}} D_{\alpha\gamma}^i(R)$$

$$g = \sum_i l_i^2 \text{ 个矢量}$$

$$\vec{V}^{111}, \vec{V}^{211}, \vec{V}^{311}, \vec{V}^{312}, \vec{V}^{321}, \vec{V}^{322}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} \quad \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \quad \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\{1, -1, -1, -1, 1, 1\}$$

$D_3$  群有三组不可约表示:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

# 完备性关系

(第二正交性关系)

$$\vec{V}^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} \sqrt{\frac{l_i}{g}} D_{\alpha\gamma}^i(R)$$

$$g = \sum_i l_i^2 \text{ 个矢量}$$

一组表示矢量构成群元空间的一组基矢，群元空间中的一切矢量可以用这组基矢的叠加展开，这就是表示矢量的完备性。

## 不可约表示矩阵元

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\mu=1}^{l_i} \sum_{\rho=1}^{l_i} l_i D_{\mu\rho}^i(R)^* D_{\mu\rho}^i(S) = g \delta_{RS}$$

特征标

对不可约表示求和

Page: 93-95

第*l*类的群元个数

$$h_l \sum_{i=1}^r \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g \delta_{lm}$$

$$\vec{V}^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} V^{i\alpha\gamma} = \sum_R \vec{R} \sqrt{\frac{l_i}{g}} D_{\alpha\gamma}^i(R)$$

$$g = \sum_i l_i^2 \text{ 个矢量}$$

正交性关系

$$\vec{V}^{111}, \vec{V}^{211}, \vec{V}^{311}, \vec{V}^{312}, \vec{V}^{321}, \vec{V}^{322}$$

$$\begin{pmatrix} E \\ A \\ B \\ C \\ D \\ F \end{pmatrix} \sqrt{\frac{l_i}{g}} D_{\alpha\gamma}^i(R) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

完备性关系

$$E: (1 \ 1 \ \sqrt{2} \ 0 \ 0 \ \sqrt{2})/\sqrt{6}$$

$$A: (1 \ -1 \ \sqrt{2} \ 0 \ 0 \ -\sqrt{2})/\sqrt{6}$$

$$B: (1 \ -1 \ -\sqrt{2}/2 \ \sqrt{6}/2 \ \sqrt{6}/2 \ \sqrt{2}/2)/\sqrt{6}$$

$$C: (1 \ -1 \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ \sqrt{2}/2)/\sqrt{6}$$

$$D: (1 \ 1 \ -\sqrt{2}/2 \ \sqrt{6}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ -\sqrt{2}/2)/\sqrt{6}$$

$$F: (1 \ 1 \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ \sqrt{6}/2 \ -\sqrt{2}/2)/\sqrt{6}$$

$$\langle x|x' \rangle = \delta(x - x')$$

$$\sum_n \langle x|\psi_n \rangle \langle \psi_n|x' \rangle = \sum_n \psi_n(x) \psi_n(x')^* = \delta(x - x')$$

第二行是插入完备性关系  $\sum_n |\psi_n \rangle \langle \psi_n| = I$  展示出的正交性。但是完备性关系里也藏着正交性，如果  $\{|\psi_n \rangle\}$  不互相正交，得不到完备性这个等式关系，在这个意义上， $\sum_n |\psi_n \rangle \langle \psi_n| = I$  也被称为正交完备关系。

一个Hilbert空间是完备的，其任一Cauchy序列的范数是有限的（即使讨论无穷维度），这保证了距离（内积）定义的有效性，也使得Cauchy序列不“跑出”空间，保证空间完备性。

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{n} \right|^2 = \frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$$

Q: What is the intuitive picture that the rank of rows equals the rank of columns in a matrix ?

$$M = u\lambda v^T = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i v_i$$

$m \times n$        $m$  entries       $u_i$        $v_i^T$        $n$  entries

$\{u_i\}$ ,  $\{v_i\}$ 分别为正交向量集

$r$  : 矩阵  $M$  的 rank

一个有限群的不等价不可约表示的总数 $r$  与群中类的数目 $c$  相等

$$r = c$$

正交性: 
$$\sum_{C=1}^c h_C \chi_C^{i*} \chi_C^j = g \delta_{ij} \quad (1)$$

取(1)式中  $i = j$  
$$\sum_{C=1}^c h_C \chi_C^{i*} \chi_C^i = g$$

对表示求和

$$\sum_{i=1}^r \sum_{C=1}^c h_C \chi_C^{i*} \chi_C^i = \sum_{i=1}^r g = r g \quad (1')$$

对类求和

完备性:  $h_l \sum_{i=1}^r \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g \delta_{lm} \quad (2)$

第  $l$  类的群元个数

$$\text{取 } C_l = C_m = C \rightarrow h_c \sum_{i=1}^r \chi_c^{i*} \chi_c^i = g$$

对类求和

$$\sum_{C=1}^c h_c \sum_{i=1}^r \chi_c^{i*} \chi_c^i = \sum_{C=1}^c g = cg \quad (2')$$

比较(1') (2')

$$r = c$$

# 正交完全关系和特征标表

特征标表:

	$C_1$	$C_2$	$\dots$	$C_i$	$\dots$	$C_c$
$D^1$	$\chi_1^1$	$\chi_2^1$	$\dots$	$\chi_i^1$	$\dots$	$\chi_c^1$
$D^2$	$\chi_1^2$	$\chi_2^2$	$\dots$	$\chi_i^2$	$\dots$	$\chi_c^2$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$D^j$	$\chi_1^j$	$\chi_2^j$	$\dots$	$\chi_i^j$	$\dots$	$\chi_c^j$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$D^r$	$\chi_1^r$	$\chi_2^r$	$\dots$	$\chi_i^r$	$\dots$	$\chi_c^r$

$$r = c$$

$r$  个表示,  
 $c$  个类

$$r = c$$

特征标表中  $r = c$ : 类的数目等于不等价不可约表示的数目。

不等价不可  
约表示个数

类数

特征标的正交完备关系表明：

特征标  $\chi^i(C_m)$  构成 共轭类的函数（类的函数）的完备基。

群空间的完备性：
$$F(g_1) = \sum_{ilk} \frac{1}{m_i} c_{lk}^i D_{lk}^i(g_1)$$

$$F(g_1) = \sum_{il} \frac{1}{m_i} c_{il}^i \chi^i(g_1)$$

The characters,  $\chi^i(g)$ , of the independent irreducible representations form a complete, orthonormal basis set of the functions that are **constant** on conjugate classes.

（同一个类的不同类元在  $F$  映射下得到同样的值）

参看 (1.81) - (1.85) in Lie algebras in particle physics by George

例如： $D_3$ 群有三组表示，它也只有三个类。

$D_3$  群有三组不可约表示：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$$

$$\{1, -1, -1, -1, 1, 1\}$$

$D_3$  群的三个类：

$E$  自成一类

$A, B, C$  组成一类

$D, F$  组成一类

定理：若以某一共轭元素类在各个不可约表示的特征标为分量构成矢量，则各个类所代表的矢量正交：

$$h_l \sum_{i=1}^r \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g \delta_{lm}$$

—— 完备性

第  $l$  类的群元个数

例：  $D_3: \{E\}, \{A, B, C\}, \{D, F\}$  三个类，特征标为

	$C_1$	$C_2$	$C_3$		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
设特征标为：							
		一维	$D^1$		1	1	1
		一维	$D^2$		1	$a$	$b$
		二维	$D^3$		2	$c$	$d$

利用三个正交关系方可求得  $a, b, c, d$ （取实数）

$$h_l \sum_{i=1}^r \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g \delta_{lm}$$

解法1：利用完备性

当  $l = m = 2$  时，得  $3(1 + |a|^2 + |c|^2) = 6 \Rightarrow |a|^2 + |c|^2 = 1$  — (1)

$l = 1, m = 2$  时，得  $1 + a + 2c = 0$  — (2)

$l = 1, m = 3$  时，得  $1 + b + 2d = 0$  — (3)

$l = m = 3$  时，得  $2(1 + |b|^2 + |d|^2) = 6$  — (4)

$l = 2, m = 3$  时，得  $1 + a^*b + c^*d = 0$  — (5)

联立 (1~4) 式解得两组解： $a = -1, b = 1, c = 0, d = -1$ ;

$a = -1, b = -7/5, c = 0, d = 1/5$  这组

解不满足 (5) 式，舍。（所有的正交性关系都应满足）

$$h_l \sum_{i=1}^r \chi^i(C_l)^* \chi^i(C_m) = g \delta_{lm}$$

解法1: 利用完备性

解得  $a = -1, b = 1, c = 0, d = -1$ , 则有

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	$a$	$b$
二维	$D^3$	2	$c$	$d$

列  
正  
交  
性

$\nearrow C_1, C_2, C_3 \nwarrow$   
 $\uparrow$

$D_3: \{E\}, \{A, B, C\}, \{D, F\}$

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	-1	1
二维	$D^3$	2	0	-1

解法2: 用正交性

$$\sum_{l=1}^c h_l \chi^i(C_l)^* \chi^j(C_l) = g \delta_{ij}$$

当  $i = 1, j = 2$  , 得  $1 \times 1 + 3a + 2b = 0$

$i = 1, j = 3$  , 得  $1 \times 2 + 3c + 2d = 0$

$i = 2, j = 2$  , 得  $1 \times 1 + 3|a|^2 + 2|b|^2 = 6$

$i = 2, j = 3$  , 得  $1 \times 2 + 3a^*c + 2b^*d = 0$

$i = 3, j = 3$  , 得  $4 + 3|c|^2 + 2|d|^2 = 6$

还有另外  
一组解吗?

解之得  $a = -1, b = 1, c = 0, d = -1,$

$D_3, \{E\}, \{A, B, C\}, \{D, F\}$

特征标表

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	$a$	$b$
二维	$D^3$	2	$c$	$d$

行正交性



		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	-1	1
二维	$D^3$	2	0	-1

解法2: 用正交性

$$\sum_{l=1}^c h_l \chi^i(C_l)^* \chi^j(C_l) = g \delta_{ij}$$

当  $i = 1, j = 2$ , 得

$$1 \times 1 + 3a + 2b = 0$$

$i = 1, j = 3$ , 得

$$1 \times 2 + 3c + 2d = 0$$

$i = 2, j = 2$ , 得

$$1 \times 1 + 3|a|^2 + 2|b|^2 = 6$$

$i = 2, j = 3$ , 得

$$1 \times 2 + 3a * c + 2b * d = 0$$

$i = 3, j = 3$ , 得

$$4 + 3|c|^2 + 2|d|^2 = 6$$

可以是这  
一组解吗?

**No** -----  
 $D^2$ 表示不可  
被么正化!

解之得  $a = -1, b = 1, c = 0, d = -1$ ,

$D_3, \{E\}, \{A, B, C\} \{D, F\}$

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	$a$	$b$
二维	$D^3$	2	$c$	$d$

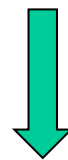
行正交性



一维  $D^1$   
一维  $D^2$   
二维  $D^3$

特征标表

	$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维 $D^1$	1	1	1
一维 $D^2$	1	$3/5$	$-7/5$
二维 $D^3$	2	$-4/5$	$1/5$



有限群的群元为 $g$ 个取值，群元空间为 $g$ 维，所以只有 $g$ 个线性无关的群函数，向量空间中线性无关的矢量(由群函数构建，参见P91)数目不能大于空间的维数。群表示矩阵元是群函数。

Burnside定理：有限群所有不等价不可约表示维数平方和等于群的阶数：

$$\sum_j m_j^2 = g$$

群 $G$ 共有 $c$ （与群的类的个数相等）套不等价不可约么正表示： $D^1, D^2, \dots, D^j, \dots, D^c$

维数： $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots, m_c$

则

$$m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_j^2 + \dots + m_c^2 = g$$

（ $G$ 的阶）

四阶群:  $G = \{E, A, B, C\}$  两种可能的群表

	$E$	$A$	$B$	$C$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$
$A$	$A$	$B$	$C$	$E$
$B$	$B$	$C$	$E$	$A$
$C$	$C$	$E$	$A$	$B$

循环群:

$$B=A^2,$$

$$C=BA = A^3,$$

$$G=\{E, A, A^2, A^3\}$$

问: 此群有几个不等价不可约表示?

	$E$	$A$	$B$	$C$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$
$A$	$A$	$E$	$C$	$B$
$B$	$B$	$C$	$E$	$A$
$C$	$C$	$B$	$A$	$E$

非循环群:

$$A^2 = B^2 = C^2 = E$$

$$D(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D(C_2(z)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D(C_2(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; D(C_2(y)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D(iC_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; D(iC_4^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

一维显然表示

下面三个表示是否是此群全部的不可约表示？

	$E$	$C_2(z)$	$C_2(x)$	$C_2(y)$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$iC_4$	$iC_4^{-1}$
$D^1$	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
$D^2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$D^3$	1	1	1	1	1	1	1	1

$$1^2 + 2^2 + 1^2 = 6$$

特征标给出的信息：

特征标是类的函数，

表示  $D^2$  : 元素1,2自成一类, 3,4,5,6,7,8  
特征标相同 (为0)  
进入下一轮筛选

表示  $D^1$  : 元素5,6表示矩阵与3,4,7,8的不一样

直接从计算的角度: (5,6) ; (3,4) ; (7,8)  
三个类里每个类中的两个元素表示矩阵差一个符号

$D^2$  表示矩阵依次为:  $I, -I, \sigma_z, -\sigma_z, \sigma_x, -\sigma_x, -i\sigma_y, i\sigma_y$

Pauli矩阵性质:  $\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$

# 特征标表的另一种求法 ----- 类和法

## 1. 定义

(a) 矢量的群乘：群元空间中按照群的运算得出的第三个矢量。  
如在  $D_3$  群中，

$$\begin{aligned}(\vec{A} + 3\vec{B})(2\vec{D} + \vec{F}) &= 2\vec{A}\vec{D} + \vec{A}\vec{F} + 6\vec{B}\vec{D} + 3\vec{B}\vec{F} \\ &= 2\vec{B} + \vec{C} + 6\vec{C} + 3\vec{A} \\ &= 2\vec{B} + 7\vec{C} + 3\vec{A}\end{aligned}$$

(b) 类和矢量：同一个类  $C_i$  的全部群元（基矢）的和

$$\vec{\tilde{C}}_i = \sum_{R \in C_i} \vec{R}$$

2. 类和定理 (a)  $\vec{\tilde{C}}_i \vec{\tilde{C}}_j = \sum_k c_{ijk} \vec{\tilde{C}}_k$

(b) 若类  $C_i, C_j, C_k$  三个类在同一个不可约表示中的特征标为

$\chi_i, \chi_j, \chi_k$ , 则

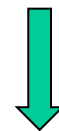
$$h_i \frac{\chi_i}{\chi_E} \cdot h_j \frac{\chi_j}{\chi_E} = \sum_k c_{ijk} h_k \frac{\chi_k}{\chi_E}$$

证: 令  $D_i$  为  $C_i$  各元的表示矩阵之和, 即

$$D_i = \sum_{R \in C_i} D(R)$$

$$D^{-1}(X) D_i D(X) = D_i$$

$$D_i D(X) = D(X) D_i, \forall X \in G$$



舒尔引理

$$D_i = \eta_i I_0 \quad \text{则} \quad \text{tr} D_i = l_i \eta_i = \chi_E \eta_i$$

另一方面，从表达式直接开始  $D_i = \sum_{R \in C_i} D(R)$

$$\text{tr}D_i = \sum_{R \in C_i} \text{tr}D(R) = \sum_{R \in C_i} \chi(R) = h_{C_i} \chi(C_i) = h_i \chi_i$$

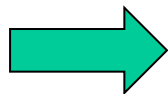
$$\chi_E \eta_i = h_i \chi_i \quad \eta_i = h_i \frac{\chi_i}{\chi_E} \quad (*)$$

表示矩阵与类矢量满足相同的表达式

$$D_i = \eta_i I_0 \quad \downarrow \quad D_i D_j = \sum_k c_{ijk} D_k$$

$$\eta_i \eta_j = \sum_k c_{ijk} \eta_k$$

(\*)



$$h_i \frac{\chi_i}{\chi_E} h_j \frac{\chi_j}{\chi_E} = \sum_k c_{ijk} h_k \frac{\chi_k}{\chi_E}$$

(c) 类和法求特征标表

$D_3$ 群的三个类和矢量:

$$\vec{\tilde{C}}_1 = \vec{E}, \vec{\tilde{C}}_2 = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}, \vec{\tilde{C}}_3 = \vec{D} + \vec{F}$$

$$\vec{\tilde{C}}_2 \vec{\tilde{C}}_2 = 3\vec{\tilde{C}}_1 + 3\vec{\tilde{C}}_3 \quad \downarrow \quad \vec{\tilde{C}}_i \vec{\tilde{C}}_j = \sum_k c_{ijk} \vec{\tilde{C}}_k$$
$$c_{221} = 3, c_{223} = 3$$

$$\vec{\tilde{C}}_2 \vec{\tilde{C}}_3 = 2\vec{\tilde{C}}_2, \text{有 } c_{232} = 2$$

$$\vec{\tilde{C}}_3 \vec{\tilde{C}}_2 = 2\vec{\tilde{C}}_2, \text{有 } c_{322} = 2$$

$$\vec{\tilde{C}}_3 \vec{\tilde{C}}_3 = 2\vec{\tilde{C}}_1 + \vec{\tilde{C}}_3, \text{有 } c_{331} = 2, c_{333} = 1$$

求 $D_3$  群的一维表示, 此时  $\chi_E = 1$

$$\tilde{C}_3 \tilde{C}_3 = 2\tilde{C}_1 + \tilde{C}_3, \text{ 有 } c_{331} = 2, c_{333} = 1$$

$$h_i \frac{\chi_i}{\chi_E} h_j \frac{\chi_j}{\chi_E} = \sum_k c_{ijk} h_k \frac{\chi_k}{\chi_E}$$

$$2\chi_3 \cdot 2\chi_3 = 2 \cdot 1 \cdot \chi_1 + 2\chi_3 = 2 + 2\chi_3$$

$$\chi_3 = 1, \quad -\frac{1}{2} \text{ (舍)} \rightarrow \text{不可能构成一维幺正表示}$$

$$\tilde{C}_2 \tilde{C}_2 = 3\tilde{C}_1 + 3\tilde{C}_3 \quad c_{221} = 3, c_{223} = 3$$

$$3\chi_2 \cdot 3\chi_2 = 3 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot (\chi_3 = 1) = 9, \quad \chi_2 = 1, -1$$

两个一维表示

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	-1	1

求二维表示的特征标

课堂练习

## 三个二维表示的特征标表

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
二维	$E^1$	2	2	2
二维	$E^2$	2	-2	2
二维	$E^3$	2	0	-1

前两个二维表示的特征标，是前两个一维表示的两倍

$$E^1 = D^1 \oplus D^1,$$

$$E^2 = D^2 \oplus D^2$$

只有 $E^3$ 是独立的二维表示

综合一维二维表示，可得

		$C_1$	$3C_2$	$2C_3$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	-1	1
二维	$D^3$	2	0	-1

求特征标表，可以多种武器混合使用

Burnside定理的意义为： $m_j$ 维的表示中可有 $m_j^2$ 个独立的变量，可承担独立的群函数的任务，但它的空间不会大于 $G$ 的空间。

即： $m_j$ 维表示中线性独立（互相正交）的矢量个数有 $m_j^2$ 个， $\therefore$ 所有表示的线性独立的矢量个数 $\sum_j m_j^2$ 不会超过群空间的维数。

$$\text{当 } i = j, \mu = \nu, \rho = \lambda \text{ 时, } \frac{1}{g} \sum_{R \in G} D_{\mu\rho}^i(R)^* D_{\nu\lambda}^j(R) = \frac{1}{m_j} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\lambda}$$

$$\text{变为: } \sum_{R \in G} |D_{\mu\rho}^i(R)|^2 = \frac{g}{m_i}$$

即每个矢量的长度都为  $\sqrt{\frac{g}{m_i}}$

正三角形群 $D_3$ 的不可约表示:

$E \quad A \quad B \quad C \quad D \quad F$

二维表示:

$$D^2(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D^2(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, D^2(B) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$D^2(C) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, D^2(D) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, D^2(F) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

满足  $\sum_{R \in G} \chi(R)^* \chi(R) = g$  , 表示矩阵不可约。

这套表示所构成的矢量有：

$$\left. \begin{aligned} \vec{P}_{11} &= \left(1, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \vec{P}_{12} &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{P}_{21} &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{P}_{22} &= \left(1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \right\}$$

这四个矢量长度均为

$$\sqrt{\frac{g}{m_j}} = \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{3}$$

它们相互正交。

这四个矢量是线性独立的，但也只有四个。

$D_3 : g = 6$ ，而现只有四个矢量，按Burnside定理，还应有两个矢量，即： $\{1, 1, 1, 1, 1, 1\}$  和  $\{1, -1, -1, -1, 1, 1\}$

长度均为  $\sqrt{\frac{6}{1}} = \sqrt{6}$ ，并且同上面四个矢量也是正交的。

## 群表示的性质总结

1. 定理：有限群表示为不可约的充要条件是  $\frac{1}{g} \sum_{R \in G} |\chi(R)|^2 = 1$

证：有  $R \in G$ ，表示为  $D(R)$

$$\begin{aligned} \sum_{R \in G} |\chi(R)|^2 &= \sum_{R \in G} \left[ \sum_j a_j \chi^j(R) \right] \left[ \sum_{j'} a_{j'} \chi^{j'}(R)^* \right] = \sum_j \sum_{j'} a_j a_{j'} \sum_{R \in G} \chi^j(R) \chi^{j'}(R)^* \\ &= \sum_{jj'} a_j a_{j'} g \delta_{jj'} = \sum_j a_j^2 g = g(a_1^2 + a_2^2 + \dots) \end{aligned}$$

若  $D(R)$  不可约，则  $\sum_{R \in G} |\chi(R)|^2 = g$

$$2. \quad m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_r^2 = g \quad \left( \sum_{i=1}^r m_i^2 = g \right)$$

(Burnside 定理) 共  $r$  套表示， $m_i$  为第  $i$  套表示的维数。

3. 不等价不可约表示的数目 ( $r$ ) 等于群的共轭元素类的数目 ( $c$ )

例1: Abel群的表示: (Abel群中每一个元素自成一类)

令:  $g$ 为表示矩阵的个数,  $c$ 为类的数目,  $r$ 为不可约表示的独立套数。

对Abel群:  $g = c = r$  又 $\because m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_c^2 = g$

因此, 只有一种可能  $m_1 = m_2 = \dots = m_c = 1$

如 $C_n\{R = C_n, R^2 = C_n^2, R^3 = C_n^3, \dots, R^n = C_n^n = E\}$ 为Abel群

$$\chi(R^n) = \begin{cases} \chi(E) = 1 \\ \text{tr}D(R^n) = \text{tr}[D(R)]^n = [\chi(R)]^n = 1 \end{cases}$$

$$\chi(R) = \frac{1}{n} = e^{i\frac{2\pi m}{n}} \quad , \quad m = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

写出3阶阿贝尔群的特征标表

		$E$	$R$	$R^2$	
一维	$D^1$	1	1	1	
一维	$D^2$	1	$e^{i2\pi/3}$	$e^{i4\pi/3}$	
一维	$D^3$	1	$e^{i4\pi/3}$	$e^{i2\pi/3}$	$\rightarrow \chi(R) = 1^{\frac{1}{n}} = e^{i\frac{2\pi m}{n}}$

$$\{E \quad R \quad R^2\}: R$$

三个一维表示

$$\{E \quad R^2 \quad R^4\}: R^2$$

循环群的循环:

$$\{E \quad R^3 \quad R^6\}: R^3$$

写出4阶阿贝尔群的特征标表

		$E$	$R$	$R^2$
一维	$D^1$	1	1	1
一维	$D^2$	1	$\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$
一维	$D^3$	1	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$	$\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

问：这是三阶循环群的特征标表吗？

No, not even a representation!

## 群的直（接乘）积

定义：设两个群 $g_a$ （阶为 $h_a$ ）和 $g_b$ （阶为 $h_b$ ）只有单位元是公共的，它们之间元素之积可对易，即： $a_i \in g_a, b_j \in g_b$ ，有

$$a_i b_j = b_j a_i, (i = 1, 2, \dots, h_a, j = 1, 2, \dots, h_b)$$

那么按群 $G$ 的乘法得到的 $h_a h_b$ 个元素 $\{a_i b_j\}$ 也构成一个群，称为 $g_a$ 和 $g_b$ 的直积群，记为： $g_a \otimes g_b$ ， $g_a$ 和 $g_b$ 称为直积因子。

证：封闭性： $a_i b_j a_{i'} b_{j'} = a_i a_{i'} b_j b_{j'} = a_{i''} b_{j''}, \in g_a \otimes g_b$

逆元： $(a_i b_j)^{-1} = a_i^{-1} b_j^{-1} \in g_a \otimes g_b$

单位元： $E_a E_b = E \in g_a \otimes g_b$

这样  $g_a \otimes g_b = g_b \otimes g_a = G$  构成群。

\*直积群的不同直积因子（如  $a_i, b_j$  等）的元素是相互对易的，但同一个直积因子中的元素可不对易（如  $a_i, a_j$  等）。

\*直积因子  $g_a$  和  $g_b$  都是直积群  $g_a \otimes g_b$  的正规子群  
对  $b_l \in g_b$  取其共轭元

$$\begin{aligned}(a_i b_j) b_l (a_i b_j)^{-1} &= a_i (b_j b_l b_j^{-1}) a_i^{-1} = a_i b_k a_i^{-1} \\ &= a_i a_i^{-1} b_k = b_k\end{aligned}$$

令  $a_i b_j = x$  则  $x g_b x^{-1} = g_b$

$\therefore g_b$  是  $g_a \otimes g_b$  的正规子群

同理， $g_a$  也是  $g_a \otimes g_b$  的正规子群

# 表示的直积

矩阵的直积 (1) **定义** 如果有两个矩阵 $\alpha$ ,  $\beta$ , 其中,  
 $\alpha$ 是 $m \times n$  的矩阵,  $\beta$ 是 $p \times q$  的矩阵,  
 $\gamma$ 是  $mp \times nq$  的矩阵, 矩阵元关系满足

$$\gamma_{ij,kl} = \alpha_{ik}\beta_{jl},$$
$$\gamma = \alpha \otimes \beta$$

$\gamma$  是两个矩阵  $\alpha$ ,  $\beta$  的直积, 记作


$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \alpha_{11}\beta_{12} & \alpha_{12}\beta_{11} & \alpha_{12}\beta_{12} \\ \alpha_{11}\beta_{21} & \alpha_{11}\beta_{22} & \alpha_{12}\beta_{21} & \alpha_{12}\beta_{22} \\ \alpha_{21}\beta_{11} & \alpha_{21}\beta_{12} & \alpha_{22}\beta_{11} & \alpha_{22}\beta_{12} \\ \alpha_{21}\beta_{21} & \alpha_{21}\beta_{22} & \alpha_{22}\beta_{21} & \alpha_{22}\beta_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}\boldsymbol{\beta} & \alpha_{12}\boldsymbol{\beta} \\ \alpha_{21}\boldsymbol{\beta} & \alpha_{22}\boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}$$

问：当  $m, n, p, q$  任意取值，直积矩阵 的第  $a$  行  
第  $b$  列元素是？

$$a = (i - 1) \times p + j, \quad j \in [1, p]$$
$$b = (k - 1) \times q + l, \quad l \in [1, p]$$

$$\gamma_{a,b} = \alpha_{ik} \beta_{jl},$$

  
 $(ij), (kl)$

## (2) 定理

若  $\gamma = \alpha \otimes \beta, \bar{\gamma} = \bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}$ , 则有  
 $(\alpha \otimes \beta)(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}) = (\alpha \bar{\alpha} \otimes \beta \bar{\beta})$

证明：取上式左边矩阵的一个矩阵元

$$\begin{aligned} [(\alpha \otimes \beta)(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta})]_{il, kn} &= \sum_{j, m} (\alpha \otimes \beta)_{il, jm} (\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta})_{jm, kn} \\ &= \sum_{j, m} \alpha_{ij} \beta_{lm} \bar{\alpha}_{jk} \bar{\beta}_{mn} = \sum_{j, m} \alpha_{ij} \bar{\alpha}_{jk} \beta_{lm} \bar{\beta}_{mn} \\ &= (\alpha \bar{\alpha})_{ik} (\beta \bar{\beta})_{ln} = [\alpha \bar{\alpha} \otimes \beta \bar{\beta}]_{il, kn} \end{aligned}$$

得证  $(\alpha \otimes \beta)(\bar{\alpha} \otimes \bar{\beta}) = (\alpha \bar{\alpha} \otimes \beta \bar{\beta})$

直积表示 (1) **定义** 群 $G$ 的两个表示  $D_G^a$  及  $D_G^b$  ,  
取这两个表示的直积, 即

$$D(A) = D^a(A) \otimes D^b(A), \forall A \in G \text{ 成立。}$$

得到一个新的矩阵的集合  $D_G$ , 其中

$D_G = D_G^a \otimes D_G^b$ , 则有  $D_G$  也是群的一个表示,  
称为直积表示。

# 直积群的表示

(1)两个可对易群的表示的直积，是直积群的表示

$$G = G_a \otimes G_b$$
$$D = D_a \otimes D_b$$

(2)直积群表示的特征标，是可对易群表示的特征标的乘积

$$\chi_G = \chi_{G^a} \chi_{G^b}$$

$$C_{2h} = C_2 \otimes C_i \quad \text{绕垂直轴转动}\pi$$

$$C_2 = \{E, c_2\}, C_i = \{E, I\}$$

$$C_{2h} = \{E, c_2, I, \sigma_h\} \quad \longrightarrow \quad \text{水平镜面反射}$$

$C_2$

## 特征标表

$C_i$

	$E$	$c_2$
$D^{a_1}$	1	1
$D^{a_2}$	1	-1

	$E$	$I$
$D^{b_1}$	1	1
$D^{b_2}$	1	-1

$C_{2h}$ 群的特征标表： $\chi_G = \chi_{G^a} \chi_{G^b}$

理解这种对应关系

	$E$	$C_2$	$I$	$\sigma_h$
$D^1$	1	1	1	1
$D^2$	1	1	-1	-1
$D^3$	1	-1	1	-1
$D^4$	1	-1	-1	1

$$D^{a_1} \otimes D^{b_1}$$

$$D^{a_1} \otimes D^{b_2}$$

$$D^{a_2} \otimes D^{b_1}$$

$$D^{a_2} \otimes D^{b_2}$$

比较4阶群的两种乘法表以及对应的特征标表：

$C_4$	$E$	$A$	$B$	$C$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$
$A$	$A$	$B$	$C$	$E$
$B$	$B$	$C$	$E$	$A$
$C$	$C$	$E$	$A$	$B$

4阶循环群

$V$	$E$	$A$	$B$	$C$
$E$	$E$	$A$	$B$	$C$
$A$	$A$	$E$	$C$	$B$
$B$	$B$	$C$	$E$	$A$
$C$	$C$	$B$	$A$	$E$

Klein自逆群

Q: 各自的特征标表?

## 课后练习题10:

一个群的两个不等价不可约表示能有完全相同的特征标吗?

## 课后练习题15:

(1) 为什么在特征标表中，除了第一列（单位元的特征标）外，没有哪一列全是正的；

(2) 除了第一行（恒等表示）外，没有哪一行全是正的。