置换群

5.1 n阶对称群S_n ；n阶置换群

置换S 将$\{1,2,\cdots n\}$ n个数字的排列$a_1,a_2,\cdots a_n$,映射为排列$b_1,b_2,\cdots b_n$

即

$$S=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} a_1 &\to b_1 \\ a_2 &\to b_2 \quad \cdots\cdots \\ a_n &\to b_n \end{aligned}$$

只要置换中每一列$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$对准，不管每列出现的顺序如何，表示同一个置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

两个置换 r,s , 先作用 s

$$r=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad s=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rs}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad sr=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

不满足交换律，满足结合律。

参考:

韩其智 孙洪洲：第五章，

李新征：第六章

恒等置换

$$s_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots n\\ 1 & 2 & \cdots n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots a_n\\ a_1 & a_2 & \cdots a_n\end{pmatrix}$$

单位元，对任意 $s\,\epsilon\, s_n$, 有 $s_0 s=s s_0=s$

(5.1)式的逆

$$s^{-1}=\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

$$a_1\to b_1\to a_1$$
$$a_2\to b_2\to a_2 \qquad \cdots\cdots$$
$$a_n\to b_n\to a_n$$

$$ss^{-1}=s^{-1}s=s_0$$

n阶置换全体构成s_n群，阶为 $n!$

s_n群是n个全同粒子的量子体系的对称群。

设有n个全同粒子系统，其$schrödinger$ 方程 (**SE**) :

$$\hat{H}(q_1,q_2,\cdots q_n)\psi(q_1,q_2,\cdots,q_n)=E\psi(q_1,q_2,\cdots,q_n)$$
$$=\sum_i\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla_i{}^2+V(\varepsilon_i)\right\}+\sum_{i<j}w\left(q_i,q_j\right)$$

其中q_i为第i个粒子的坐标和自旋，$V(\varepsilon_i)$ 表示第i粒子在外场下的能量，$w\left(q_i,q_j\right)$表示i,j粒子相互作用能。

全同性原理：系统中的两个粒子相互对换，$\hat{H}$保持不变，满足同一 SE。

$$\psi(q_1, q_2, \cdots q_i, \cdots, q_j, \cdots q_n)$$

$$= \lambda\psi(q_1, q_2, \cdots q_j, \cdots, q_i, \cdots q_n) \qquad i \to j$$

$$= \lambda^2\psi(q_1, q_2, \cdots q_i, \cdots, q_j, \cdots q_n) \qquad j \to i$$

$$\lambda^2 = 1\,, \qquad \lambda = \pm 1$$

$\lambda = +1$,波函数是$\{q_i\}$的对称函数，描写玻色子体系，体系粒子自旋为零或$\hbar$ 整数倍数，Bose-Einstein统计。

$\lambda = -1$,反对称函数，费米子体系，粒子自旋为$\frac{1}{2}\hbar$奇数倍，Dirac-Fermi统计。

粒子间交换，相应于一个置换。

粒子间任意置换 $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_n \end{pmatrix}$

使系统$\hat{H}$保持不变。

$PH = HP \qquad H = PHP^{-1} \qquad [P_{ij}, H] = 0$

全同粒子系统的对称群。

同类粒子组成的多粒子系统的基本特征是：

H对任何两个粒子变换是不变的，即变换对称性。

特殊置换→轮换

m阶轮换$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m \\ e_2 & e_3 & \cdots & e_1 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_m)$

$$\begin{matrix} e_1 \to e_2 \\ e_2 \to e_3 \\ e_m \to e_1 \end{matrix} \quad \cdots$$

$$(e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_m) = (e_2 \ e_3 \ \cdots \ \epsilon_m \ e_1) = \cdots$$
$$(e_m \ e_1 \ e_2 \cdots \ e_{m-1})$$

两个轮换$(e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_m)$和$(f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_m)$，如无公共数码，相互独立。

对易

$$\begin{aligned} &(e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_m)(f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_m) \\ &= \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_m & f_1 & f_2 & \cdots & f_m \\ e_2 & e_3 & \cdots & e_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_1 \end{pmatrix} \\ &= (f_1 \ f_2 \ \cdots \ f_m)(e_1 \ e_2 \ \cdots \ e_m) \end{aligned}$$

任意n阶置换S,总可以表示为没有公共数码轮换的乘积。

在S中取e_1，$e_1 \to e_2$，$e_2 \to e_3$，$\cdots$ 至变回e_1为止，形成一个轮换。在没有参与到第一个轮换中的数字中继续挑选一个e_m跟踪至e_m

$$\vdots$$

$$\vdots$$

直至包含所有的数字。显然无公共数字。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3)\ (2\ 4\ 5)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 6 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 4\ 5)\ (2)\ \ (3\ 6)$$
$$= (1\ 4\ 5)\ \ (3\ 6)$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)\ (2)\ (3)\ \cdots\ (n)$$
$$= (1) = (2) = (3) = \cdots (n) \swarrow$$

自身映射，简写时不记

轮换$(e_1\ \ e_2\ \ \cdots\ \ e_m)$的逆为

$$(e_1\ \ e_2\ \ \cdots\ \ e_m)^{-1} = (e_m\ \ e_{m-1}\ \ \cdots\ \ e_2\ \ e_1)$$

由2个数码组成的2阶轮换$(e_1\ e_2)$叫对换

$$e_1 \leftrightarrow e_2$$

任一个m阶轮换，就可以写成$(m-1)$个对换的成积

$$(e_1\ \ e_2\ \ \cdots\ \ e_m) = (e_1\ e_m)(e_1\ e_{m-1})\cdots(e_1\ e_3)(e_1\ e_2)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_2 & e_1 \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} e_2 & e_1 \\ e_1 & e_2 \end{pmatrix}$$

推进顺序不能改变。

设a和k是任意两个正整数，可证

$$(a\ \ a+k)=(a+1\ \ \ a+k)(a\ \ a+1)(a+1\ \ \ a+k)$$

$$\begin{cases} a+1\to a+k\to a+1(\text{不变}) \\ \qquad a+k\to a+1\to a \\ \qquad a\to a+1\to a+k \end{cases}$$

$$a\leftrightarrow a+k$$

实现对换

↓递推关系

任意对换 $(a\ \ a+k)$ 化为两个相邻数码对换的乘积。各对换因子，出现公共数码，顺序不能变。

任一置换

↓

轮换

↓

对换

↓相邻对换

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 2 & 4 & 1\end{pmatrix}=(1\ \ 3\ \ 4)=(1\ \ 4)\ \ (1\ \ 3)$$

练习

$$=\underbrace{(3\ \ 4)\,(2\ \ 3)\,(3\ \ 4)}_{(2\ \ 4)}\ \ (1\ \ 2)\ \ \underbrace{(3\ \ 4)\,(2\ \ 3)\,(3\ \ 4)}_{(2\ \ 4)}\ \ \underbrace{(2\ \ 3)\,(1\ \ 2)\,(2\ \ 3)}_{(1\ \ 3)}$$

$$\underbrace{(2\ \ 4)\qquad (1\ \ 2)\qquad (2\ \ 4)}_{(1\ \ 4)}\qquad (1\ \ 3)$$

置换S的共轭元 tSt^{-1}*，设*

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$$

$$t=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ d_1 & d_1 & \cdots & d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1 & c_2 & \cdots & c_n\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n\end{pmatrix}$$

$$t^{-1}=\begin{pmatrix}d_1 & d_2 & \cdots & d_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1 & f_2 & \cdots & f_n\\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n\end{pmatrix}$$

t 是S_n的任意元素，有

$$t\,S\,t^{-1}=\begin{pmatrix}d_1 & d_2 & \cdots & d_n\\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n\end{pmatrix}$$

即对S中上下两行同时实行置换t,相当于对S的每个轮换因子中的数码实行置换t，每个轮换因子中所包含数码个数不会改变。

如

$$S=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 2 & 4 & 6 & 1 & 5 & 3\end{pmatrix}=(1\ \ 2\ \ 4)\,(3\ \ 6)\,(5)$$

$$t=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}=(1\ \ 5\ \ 3\ \ 4)\,(2\ \ 6)$$

$$t^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{pmatrix}=(4\ \ 3\ \ 5\ \ 1)\,(6\ \ 2)$$

$$tSt^{-1}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2\\ 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4\end{pmatrix}=(5\ \ 6\ \ 1)\,(4\ \ 2)\,(3)$$

$$\mathbf{(1\ \ 2\ \ 4)\rightarrow(5\ \ 6\ \ 1)}$$

$$\mathbf{(36)\rightarrow(42)}$$

$$\mathbf{(5)\rightarrow(3)}$$

正是t所带来的

若两个置换s和r 所包含的轮换因子个数相同，每个轮换因子中的数码个数也相同，即s和r有相同的轮换结构，相互共轭。

$$s = (a_1\ \ a_2\ \ a_3)(b_1\ \ b_2)\cdots(c_1\ \ c_2\ \ \cdots\ \ c_i)$$
$$r = (d_1\ \ d_2\ \ d_3)\,(e_1\ \ e_2)\cdots(f_1\ \ f_2\ \ \cdots\ \ f_i)$$

则有

$$t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & \cdots & c_1 & c_2 & \cdots & c_i \\ d_1 & d_2 & d_3 & e_1 & e_2 & \cdots & f_1 & f_2 & \cdots & f_i \end{pmatrix}$$

满足 $tst^{-1} = r$

具有相同的轮换结构的置换构成S_n*群的一个类，对*S_n*群的轮换结构，可用*

$$(\,\nu\,) = (1^{\nu_1}\ \ 2^{\nu_2}\ \ \cdots\ \ n^{\nu_n})$$

来描写。代表轮换结构中有独立的ν_1个1阶轮换

ν_2个2阶轮换

……

ν_n个n阶轮换

$$\nu_1,\nu_2,\ \cdots,\ \nu_{\mathrm{n}} \geq 0$$

且满足 $\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots n\nu_n = n$

“In mathematics, a **Young tableau** (/tæˈbloʊ, ˈtæbloʊ/; plural: **tableaux**) is a combinatorial object useful in representation theory and Schubert calculus. It provides a convenient way to describe the group representations of the symmetric and general linear groups and to study their properties. Young tableaux were introduced by Alfred Young, a mathematician at Cambridge University, in 1900.[1][2] They were then applied to the study of the symmetric group by Georg Frobenius in 1903. Their theory was further developed by many mathematicians, including Percy MacMahon, W. V. D. Hodge, G. de B. Robinson, Gian-Carlo Rota, Alain Lascoux, Marcel-Paul Schützenberger and Richard P. Stanley.”

Refs:

•[1] William Fulton. *Young Tableaux, with Applications to Representation Theory and Geometry*. Cambridge University Press, 1997, ISBN 0-521-56724-6.

•*[2] Fulton, William; Harris, Joe (1991). Representation theory. A first course. Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics. Vol. 129. New York: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-1-4612-0979-9. ISBN 978-0-387-97495-8. MR 1153249. OCLC 246650103.* Lecture 4

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots + n\nu_n = n,$$

在 S_n 中，具有轮换结构 (ν) 的元素个数为

$$\frac{n!}{1^{\nu_1}\nu_1!\ 2^{\nu_2}\nu_2! \ldots n^{\nu_n}\nu_n!}$$

- ν_n : n阶轮换的个数， 每一个n阶轮换有n种表示方式，如（1 2 3）=（2 3 1）=（3 1 2）3阶轮换
- ν_n个相乘与顺序无关，只要 ν_n组每个组的元素保持不变，每个组无编号：

例 $\nu_n = 3, n = 2$ ，（12）（34）（56）只是一种，但写法有 3! 种（3个2阶轮换全排）

在S_n中，具有轮换结构 (v) 的元素个数为

$$\frac{n\,!}{1^{v_1}\, v_1!\, 2^{v_2}\ \, v_2! \cdots n^{v_n}\, v_n!}$$

对不同的n阶轮换

(已选定v_n个) v_n个n阶轮换换位，只计入一种　　$v_n!$ (无编号)

每一个n阶轮换表示有n种表达（对一个给定的n阶轮换），但代表同一个轮换

即
$$\begin{array}{l}(1\ \ 2\ \ \cdots\ \ \ n)\\ (\,2\ \ 3\ \ \cdots\ \ 1)\\ \quad\cdots\cdots\\ (n\ \ 1\cdots\ \ n-1)\end{array}$$

变换操作

v_n个n阶轮换。

一个轮换结构，给其一个确定的框架图，将结构画出
将数字填入框架图中

$| \ | \ | \ \cdots$

$$n^{v_n} = \overbrace{n.n\ldots n}^{v_n\text{个}}$$

(ν)代表 S_n 的一个类

也常用 $[\lambda] = [\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n]$来描述，其中

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \nu_1 + \nu_2 + \cdots \nu_n\\ \lambda_2 &= \nu_2 + \nu_3 + \cdots \nu_n\\ &\cdots\cdots\cdots\\ \lambda_n &= \nu_n\end{aligned}$$

显然有$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$，

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = n, \qquad (*)$$

$[\lambda]$称为n的一个分割，按上式分割为不增的整数和。

S_n群：类的个数由n的分割个数决定

两个分割

$$[\lambda]=[\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n]$$
$$[\lambda']=[\lambda'_1,\lambda'_2,\cdots,\lambda'_n]$$

如果第1个非零差$\lambda_i-\lambda'_i>0$

$$[\lambda]>[\lambda']$$

杨图描写分割

Young diagram

$$[\lambda]=[\lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \cdots\ \ \lambda_n]$$

杨图由n个小方格组成，第i行存λ_i个小方格

1 λ_1

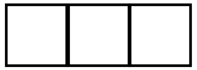
2 λ_2

………

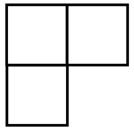
每一列小方格上下对齐。

由(*)式可知3的分割只有: [3]　　[2 1]　　[1 1 1] = $[1^3]$

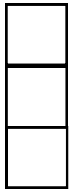
S_3群的三个类（比较D_3）



[3]



[2 1]

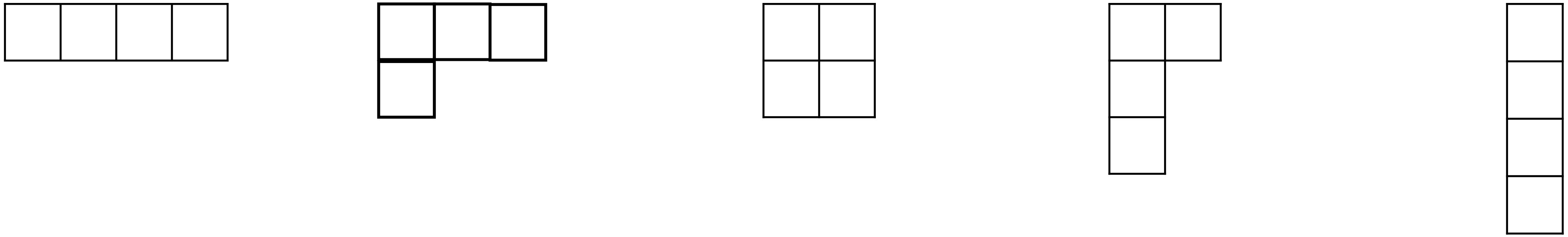


$[1^3]$

S_4的分割有5个类

[4]　　[3 1]　　[2 2] = $[2^2]$　　[2 1 1] = $[2\ 1^2]$

[1 1 1 1] = $[1^4]$



$[4]$ $[3\ \ 1]$ $[2^2]$ $[2\ \ 1^2]$ $[1^4]$

杨图$[\tilde{\lambda}]$是把$[\lambda]$中的行列互换而得，则称$[\tilde{\lambda}]$和$[\lambda]$互为共轭，如果$[\tilde{\lambda}] = [\lambda]$，则称自轭。

观上图，

$[3]$与 $[1^3]$互轭 S_3中

$[4]$与$[1^4]$

$[3\ \ 1]$与 $[2\ 1^2]$

$\begin{cases} [2\ \ 1] \\ [2\ \ 2] \end{cases}$ 自轭

The **Young diagram** is said to be of shape λ,
and it carries the same information as that partition.

Containment of one Young diagram in another defines a partial ordering on the set of all partitions, which is in fact a lattice structure, known as Young's lattice.

A **Young tableau** is obtained by filling in the boxes of the Young diagram with symbols taken from some *alphabet*, which is usually required to be a totally ordered set.
Originally that alphabet was a set of indexed variables x_1, x_2, x_3..., but now one usually uses a set of numbers for brevity.

5.2杨盘（**Young tableau**）

S_n群的杨盘，把数字$1\,,2\,,\ldots\ n$填到杨图的每一个方格中，每一个填有这种数字的杨图，即为杨盘。
每个杨盘，有$n!$种填法，有$n!$种杨盘

1	2	5
3	4	
6		

T_a

1	5	4
3	2	
6		

T_b

用符号$(i\,,j)$表示杨盘中第i行第j列的位置。

在T_a中，数字5位于（$1\,,3$）
数字4位于（$2\,,2$）
数字6位于（$3\,,1$）

$$T_b = (2\ \ 5\ \ 4)\ T_a$$

属于同一杨图的杨盘必能通过置换联系在一起。

杨盘定理

一个杨盘给出置换群在其群空间中的一个不可约表示。

同一个杨图的不同杨盘给出的表示是等价的。

不同杨图的杨盘给出的表示是不等价的。

↓

不同杨图的个数，是S_n群类的个数，S_n群的不等价不可约表示。

与之相关有7个引理，具体内容和证明另可参见：《群论及其在凝聚态物理中的应用》附录D，李新征。

5.3 S_n群的不可约表示

为讨论表示维数，引进标准杨盘概念。

一个杨盘中，每一行的数字从左到右递增

每一列的数字从上到下递增

标准盘：T_a 是， T_b不是。

S_3的标准盘

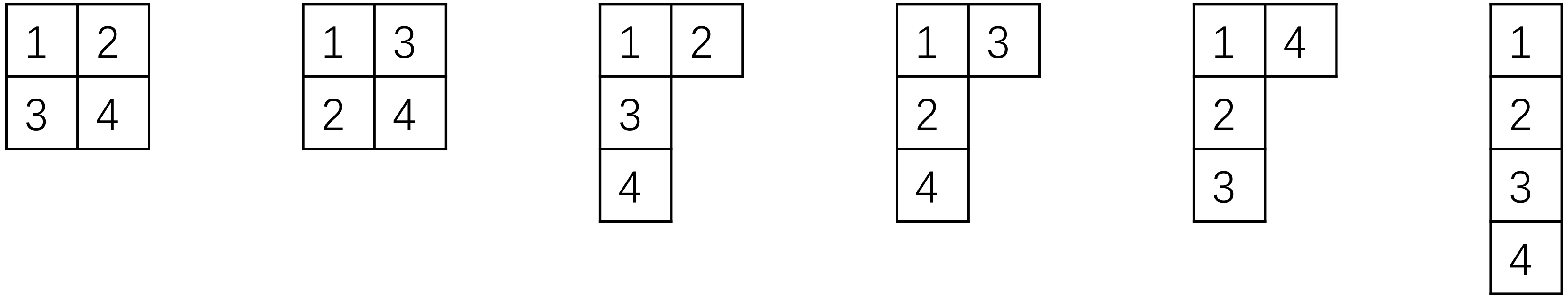
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad (a)$$

$T_1^{[3]}$ $\quad T_1^{[2\ 1]}$ $\quad T_2^{[1^3]}$ $\quad T_2^{[2\ 1]}$

S_4的标准盘

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$T_1^{[4]}$ $\quad T_1^{[3\ 1]}$ $\quad T_2^{[3\ 1]}$ $\quad T_3^{[3\ 1]}$



(b)

$T_1^{[2^2]}$ $T_2^{[2^2]}$ $T_1^{[2\,1^2]}$ $T_2^{[2\,1^2]}$ $T_3^{[2\,1^2]}$ $T_1^{[1\,4]}$

对于一个标准盘 $T_i^{[\lambda]}$ ，右上角 $[\lambda]$ 给出这盘对应的分割所属杨图。
左下角 i 是对同属于一个杨图的各标准盘的编号，从第一行的左端开始，从左到右逐个比较，数字小的编在前面。如果第一行完全相同，则从第二行从左到右开始比较。

依此类推，可得对标准盘的编号$i = 1,2,\cdots,f^{[\lambda]}$， $f^{[\lambda]}$是杨图 $[\lambda]$ 的标准盘个数。

定理：杨图 $[\lambda]$ 所对应的不可约表示的维数等于该杨图标准盘的个数。

Check $S_3 \leftrightarrow D_3$

$$f^{[\lambda]} = {}^{n!}/_{\prod_{ij} g_{ij}}$$

其中g_{ij} 是杨图 $[\lambda]$ 的第 i 行第 j 列的“钩长”，它等于以$(i\ j)$格子为直角尺端点所包含的方格数，也就是在$(i\ j)$右面与下面的方格数加1，如图5.5。

对$[\lambda] = [6\ 4\ 3]$的S_{13}杨图。

$g_{11} = 8$，$g_{12} = 7$，$g_{13} = 6$，$\cdots$

8	7	6	4	2	1
5	4	3	1		
3	2	1			

填入的数字即“钩长”（**hook length**），所以$f^{[6\ 4\ 3]} = \dfrac{13!}{8\cdot7\cdot6\cdot4\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot3\cdot2}$
$= 13\cdot 11\cdot 9\cdot 5$

且有$\sum_{[\lambda]} \left(f^{[\lambda]}\right)^2 = n\,!$ **Burnside**定理

说明：在李新征的书中的第六章第3小节，即 6.3, 有一个关于多电子原子本征态波函数的讨论。
书中详细拆解了两电子和三电子情形。

对于置换群S_n与 SO(3) 的相互关系进行了细致的讨论。即从每一个基函数的角度，写下每一个分量，各自属于什么样的对称性，这样的对称性在S_n 和 SO(3) 各自表达为什么，构成什么样的子空间。

希望有兴趣阅读的同学可以体会到：即使在两电子情形，要弄明白也并不是容易的事情。而一旦弄明白，祝大家能感受到群论语言在分析物理问题中的对称性的妙处。这像是一个个人的探险，未知但值得尝试，其中滋味非亲历者所不能感受。如果从一个不管不顾的盲目直积方式出发，直接空间会很大（维度很高），而对称性帮我们做出了重要的筛选，排除掉了在很多简单排列组合意义上的很多可能性 ，可以说是广义的“选择定则”。

祝大家学习的旅途愉快!