

一、简答题 (40 分)

1. 伽利略时空变换：以时间和一维空间为变量，写出其时空变换的表示矩阵。(4 分)

解： $\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$,

u : 不带撇的参考系相对于带撇参考系的速度。(1 分)

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}$ (3 分)

2. 二维转动群 $SO(2)$ 群 $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ 的本征矢是什么？为什么其分量必须有复数？(6 分)

解： $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = e^{\mp i\theta} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$, 其本征矢为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ (4 分)

如果其本征矢的两个分量都为实数，那么必然在二维空间的转动操作下转动，不可能成为本征矢。(2 分)

3. 群阶为 n 的阿贝尔群的不等价不可约表示个数和维数是多少？为什么？(6 分)

解： 不可约表示个数为 n , (1 分) 维数均为 1。(1 分)

原因：一个群不等价不可约表示的个数与类的个数相等，阿贝尔群每个群元自成一类；(2 分)

一个群所有不等价不可约表示维数的平方和等于群阶，(Burnside 定理)。(2 分)

4. 问有多少类晶体点群？请画出 S_4 群的极射投影图。(8 分)
已知 $S_n = \sigma C_n$, 画图规则为：

外圆实线：有水平镜面反射

外圆虚线：没有水平镜面反射

正 n 边形： 主轴为 n 度主轴

实心： proper rotation

空心： improper rotation

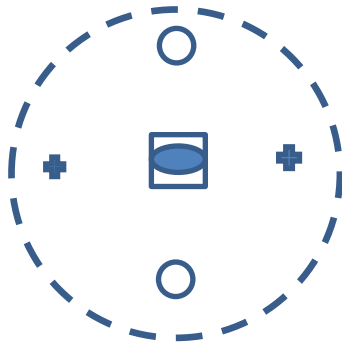
圈内虚线：与主轴垂直的二度轴

圈内实线：垂直镜面

圈上小椭圆：二度轴

○:面之下 ; + 或 × : 面之上

解: 有 32 类晶体点群。(2 分)



外圆虚线: 2 分

○, + 或 × 以 $\pi/2$ 转角交替出现 : 2 分

内部方块空心套 2 度实心: 2 分

5. 什么是特征标表? 写出三阶循环群的特征标表。(8 分)

解: 特征标表是以不等价不可约表示和不同类为指标列出的矩阵形式, 矩阵元为某一个类的某一个不可约表示矩阵的迹。(3 分)

$$\text{标记 } \omega = e^{i2\pi/3}$$

特征标表为:

	E	A	B
$D^{(1)}$	1	1	1
$D^{(2)}$	1	ω	ω^2
$D^{(3)}$	1	ω^2	ω

写对第一行第一列共 3 分, 另外四个元素每个 0.5 分, 共计 5 分。

6. 已知保持正三角形不变的 D_3 群的三个不可约表示如下,

	E	A	B	C	D	F
$D^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$D^{(2)}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
$D^{(3)}$	1	-1	-1	-1	1	1

根据不可约表示矩阵元的正交性定理:

$$\frac{1}{g} \sum_{R \in G} D_{\mu\rho}^{(i)}(R)^* D_{\nu\lambda}^{(j)}(R) = \frac{1}{m_j} \delta_{ij} \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\lambda}$$

写出与正交性关系所对应的六个矢量, 并指出这些矢量的分量来源于哪个变量。(9分)

解: 每个不可约表示的每个矩阵元, 都是群函数, 对应群表示的矢量。矢量的分量源自于群中不同的元素; (3分); 六个矢量每个计1分(共6分)

$$\begin{aligned} \vec{P}_{11} &= \left(1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \vec{P}_{12} &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{P}_{21} &= \left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \vec{P}_{22} &= \left(1, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \vec{P}_5 &= (1, 1, 1, 1, 1, 1) \\ \vec{P}_6 &= (1, -1, -1, -1, 1, 1) \end{aligned}$$

根据不可约表示矩阵元的完备性关系:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\mu=1}^{l_i} \sum_{\rho=1}^{l_i} l_i D_{\mu\rho}^i(R)^* D_{\mu\rho}^i(S) = g \delta_{RS}$$

r 是不可约表示的个数, l_i 是第*i*个不可约表示的维度, R, S 是 D_3 群的群元。写出完备性关系对应的相互正交的六个矢量, 并指出其分量的构成。(9分)

$$\begin{aligned}
E: & (1 \ 1 \ \sqrt{2} \ 0 \ 0 \ \sqrt{2})/\sqrt{6} \\
A: & (1 \ -1 \ \sqrt{2} \ 0 \ 0 \ -\sqrt{2})/\sqrt{6} \\
B: & (1 \ -1 \ -\sqrt{2}/2 \ \sqrt{6}/2 \ \sqrt{6}/2 \ \sqrt{2}/2)/\sqrt{6} \\
C: & (1 \ -1 \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ \sqrt{2}/2)/\sqrt{6} \\
D: & (1 \ 1 \ -\sqrt{2}/2 \ \sqrt{6}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ -\sqrt{2}/2)/\sqrt{6} \\
F: & (1 \ 1 \ -\sqrt{2}/2 \ -\sqrt{6}/2 \ \sqrt{6}/2 \ -\sqrt{2}/2)/\sqrt{6}
\end{aligned}$$

解：完备性关系对应的相互正交矢量对应不同的群元，以群元自身为基，分量由不同的不可约表示的矩阵元构成。这不同于正交性关系：不可约表示的矩阵元矢量互相正交，以群元为分量。

二. 解析题 (45 分)

1. 试讨论舒尔引理和定态薛定谔方程本征值的简并度的关系。(10 分)

解：相关的舒尔引理：如果一个矩阵和一个群的表示矩阵全体对易，有两种情况：

- 1, 如果此表示为不可约表示，那么这个矩阵为常数阵（常数乘以单位阵）。
- 2, 如果这个矩阵不是常数阵，那么此群的表示为可约表示。(4 分)

那么对于定态薛定谔方程（即本征值方程）而言，哈密顿量为厄米算符，不同本征值对应的本征矢正交。每一个不可约表示对应某一个本征值的 Hilbert 空间，其能级简并与对称群（此群中的每一个数学对象与哈密顿量对易）相应的不可约表示（与本征值对应）的维度相等。

$$H\psi_a^i = E^i\psi_a^i$$

不同的本征值用 i 指标来标记，对应不同的不可约表示。

当 i 给定， a 用来标记同一个不可约表示下，张开的 Hilbert 空间的维度指标，也是互相独立的基函数的指标。

设系统的对称群由 G 表示，即 $[H, G] = 0$ 。

那么 $\{G\psi_a^i\}$ span 的维度即本征值 E^i 的简并度。(6 分)

2. 已知正三角形对称操作群元 A, D 在极坐标系下满足

$$D: \begin{cases} Dr = r \\ D\theta = \theta + 120^\circ \end{cases} ; \quad A: \begin{cases} Ar = r \\ A\theta = 180^\circ - \theta \end{cases}$$

根据表示理论有

$$P_R \phi_\alpha(r) = \sum_\beta \phi_\beta(r) D(R)_{\beta\alpha}, \quad P_R \phi(r) = \phi(R^{-1}r)$$

以 $\phi_1(r, \theta) = \sin \theta$, $\phi_2(r, \theta) = \cos \theta$ 为基

求群元 A, D 的表示矩阵。 (10 分)

解:

$$\begin{aligned} P_A \phi_1 &= \phi_1(A^{-1}\theta) = \phi_1(A\theta) = \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \sin \theta + 0 \cos \theta \quad P_A \phi_1 = \sum_i \phi_i D_{i1} = \phi_1 D_{11} + \phi_2 D_{21} = \sin \theta D_{11} + \cos \theta D_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_A \phi_2 &= \phi_2(A^{-1}\theta) = \phi_2(A\theta) = \cos(180^\circ - \theta) = 0 \sin \theta - 1 \cos \theta \quad P_A \phi_2 \\ &= \sum_j \phi_j D_{j2} = \phi_1 D_{12} + \phi_2 D_{22} = \sin \theta D_{12} + \cos \theta D_{22} \end{aligned}$$

$$(3+2 \text{ 分}) \quad \therefore D(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P_D \phi_1 &= \phi_1(D^{-1}\theta) = \phi_1(F\theta) = \sin(\theta - 120^\circ) \\ &= \sin \theta \cos 120^\circ - \cos \theta \sin 120^\circ \quad P_D \phi_1 \\ &= \sum_i \phi_i D_{i1} = \phi_1 D_{11} + \phi_2 D_{21} = \sin \theta D_{11} + \cos \theta D_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_D \phi_2 &= \phi_2(D^{-1}\theta) = \phi_2(F\theta) = \\ &= \cos(\theta - 120^\circ) = \sin 120^\circ \sin \theta + \cos 120^\circ \cos \theta \\ P_D \phi_2 &= \sum_j \phi_j D_{j2} = \phi_1 D_{12} + \phi_2 D_{22} = \sin \theta D_{12} + \cos \theta D_{22} \end{aligned}$$

$$(3+2 \text{ 分}) \quad D(D) = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \sqrt{3} & -1 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. 什么是 $SO(4)$ 群? 写出其生成元。 (10 分)

答: $SO(4)$ 群是四维空间的完全转动群, 由实域的四维其行列式为 1 的正交矩阵构成。(4分)

其生成元为

$$(J_{(mn)})^{ij} = (\delta^{mi}\delta^{nj} - \delta^{mj}\delta^{ni})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_{(12)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_{(23)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = J_{(31)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_{(14)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_{(24)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = J_{(34)}$$

(每个生成元 1 分, 共 6 分)

4. 已知 $\chi^{(l)}(\alpha) = \frac{\sin((l+\frac{1}{2})\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (α 为转角) 和 O 群的特征标表如下。当孤立原子杂质进入被 O 群刻画的晶体场环境, 请写出其角动量量子数为 $l = 3$ 的表示将会约化为如下 O 群特征标表中对应的哪些不可约表示。

$$\text{已知 } a_j = \frac{1}{h} \sum_k N_k \chi^{(\Gamma_j)}(C_k)^* \chi^{\text{reducible}}(C_k)$$

$$\chi^{\text{reducible}}(C_k) = \sum_{\Gamma_j} a_j \chi^{(\Gamma_j)}(C_k)$$

其中 Γ_j 标记点群的不可约表示。 h 是群阶, N_k 对应类 k 中的群元数目。(15分)

(评分标准以解答过程的完整性来量度)

O 群的特征标表如下:

O		E	8C ₃	3C ₂ = 3C ₄ ²	6C ₂ '	6C ₄
Γ ₁	A ₁	1	1	1	1	1
Γ ₂	A ₂	1	1	1	-1	-1
Γ ₁₂	E	2	-1	2	0	0
Γ _{15'}	T ₁	3	0	-1	-1	1
Γ _{25'}	T ₂	3	0	-1	1	-1

解：O群的五个类对应的特征标为：

$$\chi^{(l)}(E) = 2l + 1 = 7(l = 3)$$

已知 $\chi^{(l)}(\alpha) = \frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\right)\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$$\chi^{(3)}(C_3) = \frac{\sin\left[\left(3 + \frac{1}{2}\right) \times \frac{2\pi}{3}\right]}{\sin\frac{\pi}{3}} = 1$$

$$\begin{aligned}\chi^{(3)}(C_2) &= -1 \\ \chi^{(3)}(C_2') &= -1\end{aligned}$$

$$\chi^{(3)}(C_4) = -1$$

(5分)

$$\begin{aligned}a^{(\Gamma_{l=3}, A_1)} &= \frac{1}{24} (1 \times 1 \times 7 + 8 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times (-1) + 6 \times 1 \times \\ &(-1) + 6 \times 1 \times (-1)) = 0 \quad (1 \text{分})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^{(\Gamma_{l=3}, A_2)} &= \frac{1}{24} (1 \times 1 \times 7 + 8 \times 1 \times 1 + 3 \times 1 \times (-1) + 6 \times (-1) \times \\ &(-1) + 6 \times (-1) \times (-1)) = 1 \quad (2 \text{分})\end{aligned}$$

$$a^{(\Gamma_{l=3}, E)} = \frac{1}{24} (1 \times 2 \times 7 + 8 \times (-1) \times 1 + 3 \times 2 \times (-1)) = 0$$

(1分)

$$\begin{aligned}a^{(\Gamma_{l=3}, T_1)} &= \frac{1}{24} (1 \times 3 \times 7 + 8 \times 0 \times 1 + 3 \times (-1) \times (-1) + 6 \times \\ &(-1) \times (-1) + 6 \times 1 \times (-1)) = 1 \quad (2 \text{分})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a^{(\Gamma_{l=3}, T_2)} &= \frac{1}{24} (1 \times 3 \times 7 + 8 \times 0 \times 1 + 3 \times (-1) \times (-1) + 6 \times (1) \times \\ &(-1) + 6 \times (-1) \times (-1)) = 1 \quad (2 \text{分})\end{aligned}$$

$$\therefore \Gamma_{l=3} = A_2 + T_1 + T_2 \quad (2 \text{分})$$

注：系数为 0 的计算如果不写，需要说明维度的直和关系，否则扣分。

一、简答题

1. 写出 Burnside 定理 (不可约表示的维数定理), 并解释该定理的含义。(6分)

$$\text{答: } \sum_{i=1}^r n_i^2 = g \quad (3 \text{ 分})$$

一个群所有不等价不可约表示维数的平方和等于群阶, 独立群函数的个数不会超过群元个数。(3分)

2. 对于置换群 S_n 描述的 n 个全同粒子, 其完全对称态和完全反对称态分别有几种可能性, 及其相应不可约表示的维数分别是? (4分)

答: 分别有一种可能性 (2分)
其不可约表示均为一维 (2分)

二. 证明题 (10分)

试证明群 G 中属于同一类的各元的表示矩阵之和, 必与群 G 的一切元的表示矩阵对易。

证明: 设群 G 的任一群元为 A , 类元之和的倍数 (类元个数是整除因子, 倍数设为 m) 为

$$\sum_{i=1}^g h_i A h_i^{-1}$$

g 为群阶, $\forall h_i, h_j \in G$, 即任选两个群元, 对易关系为

$$h_j^{-1} [h_i A h_i^{-1}, h_j] = h_j^{-1} h_i A (h_j^{-1} h_i)^{-1} - h_i A h_i^{-1}$$

在上式的两边对整个群求和

$$\sum_{i=1}^g h_j^{-1} h_i A (h_j^{-1} h_i)^{-1} - h_i A h_i^{-1}$$

根据重排定理, $m(\text{类元} - \text{类元}) = 0$

表示矩阵与群元一一对应, 是同构关系, 表示矩阵也对易。

命题得证。

也可以在第一个等式中求和到 k , k 是类 A 中群元的数目, 进行后续计算。

三. 解析题

1. 简述 $SO(3)$ 群和 $SU(2)$ 群的关系，并给出解释。（10 分）

答： $SO(3)$ 群和 $SU(2)$ 群是 1 对 2 的同态关系，具体对应方式如下：

$SU(2)/SO(3)$: 群空间的几何对比，后者是半径为 π 的球体，在直径上与球面相交的两个点对应同一个群元，球体内的每一个点与群元一一对应，球面上两个点对应一个群元，这样使得此球体是双连通情形，任一点与单位元（即球心）的连线可以分为两组，

：包含奇数/偶数次跳跃（拓扑性质）。

- 前者是半径为 2π 的球，对比前者，半径为 π 球体内的每个点两个群一一对应，在内球之外， $(\bar{\omega}, \theta) = (-\bar{\omega}, 2\pi - \theta)$ ，等式右边的群元与左边群元映射到 $SO(3)$ 群的同一个群元，至此，已非常清楚地看到二者 2:1 的同态关系。

而 $SU(2)$ 群的球面上所有的点对应同一个群元，这就意味着此群 对应的群空间是单连通的情况。

- 连通度的比较：1: $n(= 2)$

前者是后者的覆盖群，覆盖群的真实表示是后者的 n （此处， $= 2$ ）值表示但对应着 $SU(2)$ 群中两个不同的元。

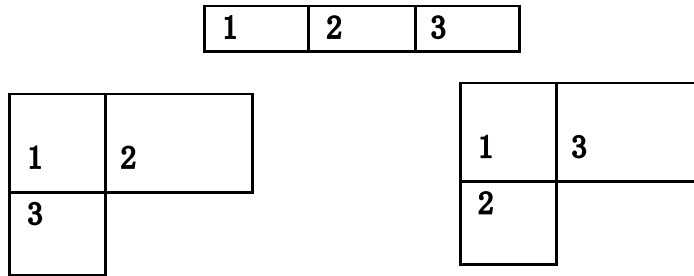
2. 列出四阶循环群 $G = \{E, C_4^1, C_4^2, C_4^3\}$ 的特征标表。（9 分）

$$\omega = e^{i\pi/2}, \omega^4 = 1$$

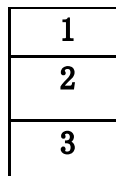
C_4	E	C_4	C_4^2	C_4^3
$D^{(1)}$	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	i	-1	$-i$
$D^{(3)}$	1	-1	1	-1
$D^{(4)}$	1	$-i$	-1	i

3.画出置换群 S_3, S_4 的标准杨盘, 说明相关杨图的对称性。并写出 S_3, S_4 的全对称和全反称的算符表达式。

S_3 : 全对称, 一个一维表示



混合对称, 一个二维不可约表示 (2分)



全反对称, 一个一维不可约表示 (2分)
共 3 个不等价不可约表示。

全对称算符为 $\hat{S} = \sum \text{all permutations in } S_3$ (2分)

$$\hat{S} = (1) + (12) + (13) + (23) + (123) + (132)$$

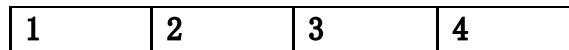
全反称算符为 $\hat{A} = \sum (\text{even permutations} -$

$\text{odd permutations in } S_3)$ (2分)

$$\hat{O} = (1) - [(12) + (13) + (23)] + (123) + (132)$$

S_4

:



全对称, 一个一维不可约表示 (2分)

1	3	4
2		

1	2	3
4		

1	2	4
3		

混合对称, 一个三维不可约表示 (3 分)

1	2
3	4

1	3
2	4

混合对称, 一个二维不可约表示 (3 分)

1	2
3	
4	

1	3
2	
4	

1	4
2	
3	

混合对称, 一个三维不可约表示 (3 分)

1
2
3
4

全反对称, 一个一维不可约表示 (2 分)

共有 5 个不等价不可约表示

全对称算符为 $\hat{S} = \sum \text{all permutations in } S_4$ (3 分)

$$\widehat{S} = (1) + (12) + (13) + (14) + (23) + (24) + (34) + (123) + (132) + (124) \\ + (142) + (134) + (143) + (234) + (243) + (12)(34) \\ + (13)(24) + (14)(23) + (1234) + (1243) + (1324) + (1342) \\ + (1423) + (1432)$$

全反称算符为 $\widehat{A} = \sum(\text{even permutations} -$

$\text{odd permutations in } S_4)$ (3分)

$$\widehat{O} = (1) - [(12) + (13) + (14) + (23) + (24) + (34)] + (123) + (132) \\ + (124) + (142) + (134) + (143) + (234) + (243) + (12)(34) \\ + (13)(24) + (14)(23) - [(1234) + (1243) + (1324) + (1342) \\ + (1423) + (1432)]$$

4. 写出保持正三角形不变的 D_3 群的乘法表(说明每个群元操作), 根据类的定义写出 D_3 群的类(类的判断需写出表达式)。(16分)

答: 三角形的顶点分别为: 1, 2, 3;

边 13 上垂直轴为 A, 23 对应垂轴 B, 12 边对应垂轴 C, 分别绕 A, B, C 转动 π 角记为 A, B, C; D, F 是绕垂直于三角形平面的轴逆时针, 顺时针转动 $2\pi/3$; E 为不动操作 (3分)。

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

(乘法表 6分)

共三类:

单位元自成一类 {E} (1分)

{D, F},

(3分)

$$CDC^{-1} = F, FDF^{-1} = D, DDD^{-1} = D$$

$$EDE^{-1} = D, ADA^{-1} = F, BDB^{-1} = F,$$

{A, B, C}

$$ECE^{-1} = C, ACA^{-1} = B, BCB^{-1} = A,$$

$$CCC^{-1} = C, DCD^{-1} = A, FCF^{-1} = B$$

(3 分)

5. 简述布洛赫定理，说明二维满足周期性边界条件的格子波矢 k 取值，分别是方向的格点数目，写出此二维格子的平移群不可约表示的个数，及其不可约表示的维数，并说明原因。(13 分)

答：周期场中运动的电子的波函数，具有以下形式：

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r} - \vec{R}_l) = e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}_l} \psi_{\vec{k}}(\vec{r})$$

可改写为：

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \\ u_{\vec{k}}(\vec{r} - \vec{R}_l) &= u_{\vec{k}}(\vec{r}) \end{aligned}$$

当平移晶格矢量 \vec{R}_l 时，波函数只增加位相因子 $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{R}_l}$ 。周期性边界条件要求 $e^{-ik_i N_i} = 1$, $\Delta k_i = 2\pi/N_i$, k 取值个数与格点数目相同。

波函数为平面波与周期函数的乘积。

平移群是阿贝尔群，二维情况（周期性边界条件）下，群阶为 $N_x N_y$ ，等于类的个数，即不可约表示的个数，根据 Burside 定理，全部为一维表示。

- 四. 附加题：简述时间反演对称性，并讨论时间反演对称性对简并度的影响，对讨论中涉及的物理量及表达式给出解释。(20 分) (说明：此题用于在前面题目得分基础上根据解答加分，卷面分满分 100 为上限)

答：时间反演对称性指在数学变换 T ： t 变为 $-t$ 的情况下，所关心的对象保持不变。注意时间演并非时间倒流，而是“运动”的反演。(2 分)

时间反演对称性对简并度的影响如下表：

情况	判据 $\sum_{R \in G} \chi(R^2)$	D 与 D^* 的关系	整数自旋	半数自旋
----	-------------------------------	-----------------	------	------

(1)	g	等价于实表示	无附加简并性	简并度加倍
(2)	0	不等价	简并度加倍	简并度加倍
(3)	$-g$	等价非实表示	简并度加倍	无附加简并性

(10 分)

解释：设体系的哈密顿算符 H 拥有点群对称性 $G = \{R\}$ ，附加上反演对称性后，与 H 对易的操作包含 $T, \{TR\}$ 。 $T, \{TR\}$ 均为反线性么正算符。

如果 $\{\psi_l\}$ furnish (荷载) 群 G 的不可约表示 D_G ，

则 $\{T\psi_l\}$ furnish 群 G 的不可约表示 D_G^* (D_G 的复共轭表示矩阵)。

ψ_l 与 $T\psi_l$

是否线性无关，决定了时间反演对称性是否引起能级简并度增加。

(8 分)

5. 写出时间反演算符在不考虑自旋和考虑自旋情况下的表达式。(4 分)

答：无自旋： $T = K$ (2 分)

有自旋： $T = i\sigma_2 K$ (2 分)

6. 对于置换群 S_n 描述的 n 个全同粒子，其完全对称态和完全反对称态分别有几种可能性，及其相应不可约表示的维数分别是？(4 分)

答：分别有一种可能性 (2 分)

其不可约表示均为一维 (2 分)

三. 解析题

写出 $SU(2)$ 群的 $j = \frac{1}{2}, 1$ 的表示矩阵，即二维及三维表示矩阵。(10 分)

提示： $P_{uf}^j(\xi_1, \xi_2) = f_m^j(\xi'_1, \xi'_2) = \frac{(a\xi_1 - b^*\xi_2)^{j+m}(b\xi_1 + a^*\xi_2)^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}$

$$P_{uf} f_m^j(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m'} f_{m'}^j(\xi_1, \xi_2) D^j(u)_{m',m}$$

1.

解：矩阵的行列指标排序 $j = \frac{1}{2}$: $m = 1/2, -1/2$

$$D^{1/2} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$$

(4分)

矩阵的行列指标排序 $j = 1$: $m = 1, 0, -1$

$$D^1 = \begin{bmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ab^* & aa^* - bb^* & \sqrt{2}a^*b \\ b^{*2} & -\sqrt{2}a^*b^* & a^{*2} \end{bmatrix}$$

(6分)

解答题：试写出空间平移不变性，空间转动不变性，时间平移不变性各自对应的守恒量是什么，并选择其中一个不变性加以论证。（12分）

答：空间平移不变性：动量；（2分）

空间转动不变性：角动量（2分）

时间平移不变性：能量（2分）

以空间平移不变性为例，

系统波函数 $\psi(\vec{r})$ ，系统平移一个矢量 $\vec{\rho}$

以 $P_{\vec{\rho}}$ 表示作用于函数上的平移算符，我们有

$$P_{\vec{\rho}}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{\rho})$$

选个简单情形， $\vec{\rho} = \rho\vec{e}_x$

$$P_{\vec{\rho}}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{\rho}) = \psi(x - \rho, y, z)$$

泰勒级数展开

$$\begin{aligned} \psi(x - \rho, y, z) &= \left\{ 1 - \rho \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdots \right\} \psi(x, y, z) \\ &= \exp\left(-\rho \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x, y, z) \end{aligned}$$

这里利用了 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$

推广至一般情形 $\psi(\vec{r} - \vec{\rho}) = \exp(-\vec{\rho} \cdot \vec{\nabla})\psi(\vec{r}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \vec{\rho} \cdot \vec{p}\right)\psi(\vec{r})$

写出平移算符的作用表达式 3 分，后续的推导 3 分。

一、简答题

1. 所有行列式为 1 的三维实数矩阵构成一个群吗？如果是，写出单位元和群的乘法关系。（4 分）

答：是，（1 分）单位元：三维单位阵（2 分）。

群乘：矩阵的乘法关系（1 分）。

2. 验证角动量量子数 $l = 1$ 的三个球谐函数的正交性。（6 分）

$$Y_{1,-1}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{-i\varphi} \sin \theta, Y_{1,0}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{\pi}} \cos \theta,$$

$$Y_{1,1}(\theta, \varphi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} e^{i\varphi} \sin \theta$$

解：

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{1,-1}^*(\theta, \varphi) Y_{1,1}(\theta, \varphi) \sin \theta &\sim \int_0^{2\pi} d\varphi e^{2i\varphi} = 0 \\ \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{1,-1}^*(\theta, \varphi) Y_{1,0}(\theta, \varphi) \sin \theta &\sim \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\varphi} = 0 \\ \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{1,1}^*(\theta, \varphi) Y_{1,0}(\theta, \varphi) \sin \theta &\sim \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i\varphi} = 0 \end{aligned}$$

（每个等式各两分）

3. 置换群 S_4 有多少个群元？其最大不变子群（非 S_4 ）是什么？（8 分）

解：共有 $4! = 24$ 个群元（2分）。

最大的不变子群是 A_4 群：由 S_4 中所有偶置换构成。（6分）

4. 一个四阶群有几种可能的乘法表？每一种对应的不可约表示的个数和维数分别是多少？（6分）

答：两种可能的乘法表，受重排定理的限制。（2分）。

两种乘法表都有四个类，所以各有四个一维不可约表示。（4分）。

5. 什么是非正常转动？所有的非正当转动构成一个群吗？为什么？（6分）

答：就是行列式为-1的转动（2分），不构成群。（2分）。

因为两个非正当转动行列式乘积为1，不封闭在集合里。（2分）。

6. 简述重排定理和正规（regular）表示，以此说明正则表示和特征标特点（可以以任意一个群为例）。（10分）

答：一个群的全部元，在群表中的每一行每一列出现且仅出现一次。（3分）

正则表示是以群元本身作为基的表示，每行每列只有一个取值为1的非零元素。（3分）

单位元的特征标等于表示矩阵的维数（2分），除单位元外，正则表示的特征标为0（2分）

二. 解析题：

1. 求八阶二维矩阵群 $G =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

所包含的类的个数，需写出求解过程，列出每个类的类元。已知该矩阵群是其自身的二维不可约表示。（24分）

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 是单位阵, $= I$, 自成一类。 (3分)

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $= -I$, 自成一类。 (3分)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_z$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_x$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$

我们有关系式

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij} \Rightarrow \sigma_i \sigma_j \sigma_i = -\sigma_j, \text{ 当 } i \neq j$$

所以, 另外三个类分别是

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\sigma_z$: 两个群元
(6分)

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x$, $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_x$: 两个群元

(6分)

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sigma_y$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_y$: 两个群元

(6分)

未有解释说明情况: 一个类扣除 1 分

根据特征标的特点来阐述亦可。

一、简答题

1. 简述一个数学对象集合成为群的四个基本条件。 (8分)

答: (1) 封闭性: $\forall A \in G, \forall B \in G$, 则 $AB \in G$;

(2) 群元相乘满足结合律 : $\forall A, B, C \in G$, 则 $(AB)C = A(BC)$;

(3) 存在单位元 E : $\forall A \in G$, 恒有 $EA = AE = A$

(4) 存在逆元: $\exists A^{-1} \in G$, 使得 $A^{-1}A = AA^{-1} = E$

2. 什么叫特征标表? (4分)

答: 由群的各个不等价不可约表示, 与群中各个不同类排成的表格, 形如方矩阵。(2分)

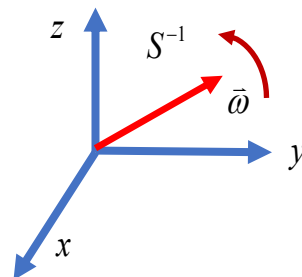
每一个矩阵元的行列标分别为不可约表示指标, 类; 元素大小即为对应的特征标。(2分)

	C_1	C_2	\cdots	C_n
$D^{(1)}$	χ_1^1	χ_2^1		χ_n^1
$D^{(2)}$	χ_1^2	χ_2^2		χ_n^2
\cdot		\cdots	\cdots	
\cdot		\cdots	\cdots	
$D^{(n)}$	χ_1^n	χ_2^n		χ_n^n

3. 写出三维空间中绕着 z 轴的转动 $R(z, \theta)$ 与绕着任一转轴 $\bar{\omega}$ 的转角相同的转动 $R(\bar{\omega}, \theta)$ 之间的关系式, 并给出解释。(6分)

$$R(\bar{\omega}, \theta) = S R(z, \theta) S^{-1} \quad (3\text{分})$$

- 解:
- (1) S^{-1} : 将转轴 $\bar{\omega}$ 转向 z 轴; (1分)
 - (2) $R(z, \theta)$: 绕着 z 轴转 θ 角; (1分)
 - (3) S : 将转轴转回 $\bar{\omega}$ 方向。 (1分)



二. 解析题

1. 分析 $SO(3)$ 群和 $SU(2)$ 群的独立参量个数，并求解 $SO(n)$ 群和 $SU(n)$ 群的独立参量个数。（18 分）

解： $SO(n)$ 群是行列式为 1 的 n 维正交实矩阵群，满足关系式 $\mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}\mathbf{R} = \mathbf{1}$ 行列式为 1 已被定义所约束。（2 分）

作为实矩阵，共有 n^2 个变量。（1 分）

令矩阵 $\mathbf{A} = \mathbf{R}\tilde{\mathbf{R}}$ ，则有

$$A_{ij} = R_{ik}\tilde{R}_{kj} = A_{ji} = R_{jk}\tilde{R}_{ki},$$

所以非对角元的约束只有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个，

加上对角元的约束： n 个，

所以独立参数个数为 $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$ 个（4 分）

$SU(n)$ 群是行列式为 1 的 n 维幺正复矩阵群，

矩阵元素为 n^2 个，因为复数分实虚部，共 $2n^2$ 个参数。（1 分）

幺正关系式为： $\mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger = \mathbf{R}^\dagger\mathbf{R} = \mathbf{1}$ （2 分）

$\mathbf{R}\mathbf{R}^\dagger$ 相乘的对角元，即复矢量的模方相加，为实数，所以对角元只提供 n 约束；

与 $SO(n)$ 群的分析类似，非对角元提供 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个方程，

因为实虚部，共 $n(n-1)$ 个约束。

另外， $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}e^{i\delta}$ ，并不破坏幺正性关系，行列式为 1，

即约束 $\delta = 0$ ，所以提供一个约束，

所以，独立参数的个数为 $2n^2 - n(n-1) - n - 1 = n^2 - 1$ （4 分）

综上， $SO(3)$ 群的独立参数为 3 个，（1 分）

$SU(2)$ 群的独立参数为 3 个。（1 分）

本题也可以从生成元的角度来进行解答。

2. 有限群的群阶和连续群的群阶分别指什么？ $SO(3)$ 群的群阶是多少？（6 分）

解：有限群指群元个数；（2 分）

连续群其群参数空间的独立变量个数。（2 分）

$SO(3)$ 群的群阶是 3。（2 分）

3. 写出 $SU(2)$ 群的四维表示矩阵 $D^{\frac{3}{2}}(u)$ 。（16 分）

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$$

已知：

$$P_{uf_m^j}(\xi_1, \xi_2) = \sum_{m'=j}^{-j} \sum_{r=0}^{j+m} \frac{(-1)^r \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{r!(j+m-r)!(j-r-m')!(r-m+m')!}$$

$$a^{j+m-r} b^{*r} a^{*j-r-m'} b^{m'-m+r} f_{m'}^j(\xi_1, \xi_2)$$

(说明：能够全部正确写出关于指标 r 的求和取值，以及矩阵对应的行列指标得 8 分，如果正确写对四个矩阵元及以上获得满分 16 分。)

解：求和指标对于不同的矩阵元素分别列举。

$m' \setminus m$	3/2	1/2	-1/2	-3/2
3/2	a^3	$\sqrt{3}a^2b$	$\sqrt{3}ab^2$	b^3
1/2	$-\sqrt{3}a^2b^*$	$a^2a^* - 2abb^*$	$aa^*b - b^*b^2$	$\sqrt{3}a^*b^2$
-1/2	$\sqrt{3}ab^{*2}$	$-2aa^*b^* + bb^{*2}$	$aa^{*2} - 2a^*bb^*$	$\sqrt{3}a^{*2}b$
-3/2	$-b^{*3}$	$\sqrt{3}a^*b^{*2}$	$-\sqrt{3}a^{*2}b^*$	a^{*3}

一、简答题

1. 所有整数作为一个群的群乘是什么？此群的单位元是？（4分）

解：数的加法（2分）

单位元为 0（2分）

2. 从李群的角度分析一下生成元（generator）（6分）

解：李群的任一变换都可以由单位元附近的无穷小变换得到。（2分）

考察一个单位元附近的无穷小变换： $(I + A)$ ， A 是小量。匹配无穷小变换参量的操作算符即为生成元： $e^{i\bar{\theta}\bar{X}}$ ， \bar{X} 为生成元， $\bar{\theta}$ 为李代数空间参数，也是生成元的线性叠加系数。（4分）

二、附加题（10分，用于加分，加到100分为止）

分析两个轨道角动量为 1 耦合的波函数。

解：耦合后的总角动量可能取值为 $J = 0, 1, 2$ （1分）

Symmetric:

• $J = 2$:

$$|2,2\rangle = |1,1\rangle$$

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle + |1,0\rangle)$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|-1,1\rangle + 2|0,0\rangle + |1,-1\rangle)$$

$$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,-1\rangle + |-1,0\rangle)$$

$$|2,-2\rangle = |-1,-1\rangle$$

$J = 0$:

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|-1,1\rangle - |0,0\rangle + |1,-1\rangle)$$

Antisymmetric:

• $J = 1$

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0,1\rangle - |1,0\rangle)$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1,1\rangle - |1,-1\rangle)$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-1,0\rangle - |0,-1\rangle)$$

9 种 state 每个 1 分，也可以用 young tableaux 来分析。

一、简答题

1. 根据时空距离不变性要求，求解洛伦兹群 $SO(1,1)$ (即 1+1 维) 的生成元。(6 分)

解: to keep the interval $\Delta t^2 - \Delta x^2$ invariant, which means that $L^T \eta L = \eta$, with $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. (2 分)

Denoting $L = I + i\varphi K$, we have

$$K^T \eta + \eta K = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

The generator $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2分)

2. 群阶为 n 的阿贝尔群的不等价不可约表示个数和维数是多少？为什么？ (6分)

解：不可约表示个数为 n , (1分) 维数均为 1。 (1分)

原因：一个群不等价不可约表示的个数与类的个数相等，

阿贝尔群每个群元自成一类； (2分)

一个群所有不等价不可约表示维数的平方和等于群阶， (Burnside 定理)。 (2分)

3. 四阶群有几种乘法表？并写出其可能的形式。写出其特征标表。

解：有两种，一种是循环群，另一种是每个元素和自己互逆。

C_4	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	B	C	E
B	B	C	E	A
C	C	E	A	B

四阶循环群的特征标表是：

C_4	E	C_4	C_4^2	C_4^3
$D^{(1)}$	1	1	1	1
$D^{(2)}$	1	i	-1	$-i$
$D^{(3)}$	1	-1	1	-1
$D^{(4)}$	1	$-i$	-1	i

另一种可能性如下：

V	E	A	B	C
E	E	A	B	C
A	A	E	C	B
B	B	C	E	A
C	C	B	A	E

(2分)

自逆四阶群，称为 Klein 群($Z_2 \otimes Z_2$), 其特征标表为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

不可约表示为一维，表示矩阵即特征标表。

二. 解析题:

两个类的类乘满足关系式 $C_i C_j = \sum_k C_{ijk} C_k$ ，以 D_3 群为例，如果对类的编号为 $C_1 = \{E\}$, $C_2 = \{A, B, C\}$, $C_3 = \{D, F\}$ ，试写下 C_{222} , C_{223} , C_{232} , C_{233} (16 分) (提示：群元的乘法关系可以从前面简答题 6 的矩阵乘法中获得。)

解:

$$C_2 C_2 = 3C_1 + 3C_3 \quad (4 \text{ 分})$$

$$C_2 C_3 = 2C_2 \quad (4 \text{ 分})$$

(注：根据乘法表计算，两个类的元素两两相乘，出现几次算几次。)

根据类乘关系式 $C_i C_j = \sum_k C_{ijk} C_k$

读出系数： $C_{222} = 0$, $C_{223} = 3$

$C_{232} = 2$, $C_{233} = 0$

每个系数 2 分，共 8 分